Schnecke auf expandierendem Ballon

Kann in einem sich expandierenden Universum das Licht einer Galaxie auch die Punkte erreichen, die sich von ihr mit mehr als Lichtgeschwindigkeit entfernen? [1]

Als einfaches Modell wird eine Schnecke betrachtet, die auf einem sich ausdehnenden Ballon kriecht. Die Schnecke S startet im Punkt A und will den Punkt B erreichen.

Gleichförmige Expansion

Während die Schnecke mit der konstanten Geschwindigkeit v kriecht, wächst gleichzeitig der Radius des Ballons mit der Geschwindigkeit u:

$$r = r_0 + u\,t\,. \tag{1}$$

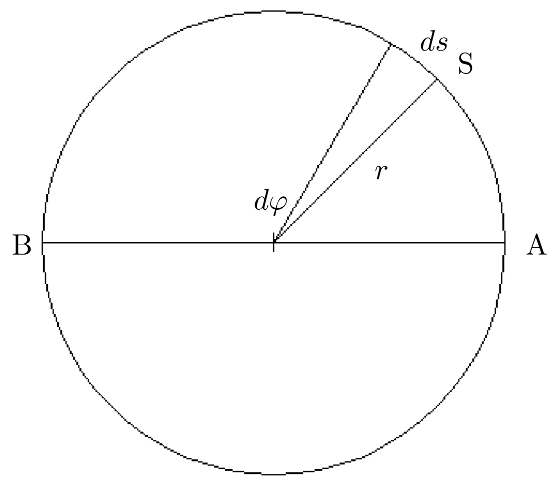

Abbildung 1: Bewegung der Schnecke im Zeitintervall dt

Sowohl der Ballon als auch die Schnecke seien nicht physisch, sondern mathematisch. Das heisst, der Ballon sei unbegrenzt dehnbar, und die Schnecke sei punktförmig und habe eine unbeschränkte Lebensdauer.

Die Strecke, die die Schnecke zurücklegen will, hat die Länge

$$w = \pi\,r\,. \tag{2}$$

Diese Strecke wächst mit der Geschwindigkeit

$$\dot{w} = \pi\,\dot{r} = \pi\,u\,. \tag{3}$$

[1] Diese Frage und das Ballon-Modell wurden für ein gleichförmig expandierendes Universum in einem Artikel in der Zeitschrift „Physikalische Blätter“ irgendwann zwischen 1957 und 1970 diskutiert. Hier wird zusätzlich der Fall eines (exponentiell) beschleunigt expandierenden Universums betrachtet.

Falls $u > v$, ist $\dot{w} > \pi\, v$, d.h. der Punkt B entfernt sich vom Punkt A mit einer Geschwindigkeit, die mehr als dreimal grösser ist als die Geschwindigkeit, mit der die Schnecke kriecht. Trotzdem kann die Schnecke den Punkt P in endlicher Zeit erreichen.

Die Strecke ds, die die Schnecke im Zeitintervall dt zurücklegt, ist gegeben durch

$$ds = r\, d\varphi = (r_0 + u\,t)\, d\varphi\,. \tag{4}$$

Ferner gilt

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}\,, \tag{5}$$

und somit

$$v = (r_0 + u\,t)\,\frac{d\varphi}{dt}\,. \tag{6}$$

Daraus folgt

$$d\varphi = \frac{v}{r_0 + u\,t}\,dt\,. \tag{7}$$

Integration dieser Differentialgleichung liefert

$$\varphi = \frac{v}{u}\ln\,(r_0 + u\,t) + c\,. \tag{8}$$

Aus der Anfangsbedingung $t = 0$, $\varphi = 0$ ergibt sich

$$c = -\frac{v}{u}\ln\,r_0 \tag{9}$$

und damit

$$\varphi = \frac{v}{u}\ln\,\frac{r_0 + u\,t}{r_0}\,. \tag{10}$$

Auflösen nach t gibt schliesslich:

$$t = \frac{r_0}{u}\,\left(\exp\,(\frac{u}{v}\,\varphi) - 1\right)\,. \tag{11}$$

Um von A nach B zu kommen, muss die Schnecke den Winkel $\varphi = \pi$ zurücklegen. Damit wird

$$t = \frac{r_0}{u}\,\left(\exp\,(\pi\,\frac{u}{v}) - 1\right)\,. \tag{12}$$

Für $r_0 = 10$ cm, $u = 10$ cm/min und $v = 10$ cm/min ergibt sich $t = 22$ min.

Wird v verkleinert auf 1 cm/min, so wird $t = 83.7$ Millionen Jahre !

Beschleunigte Expansion

Falls die Expansion exponentiell beschleunigt ist, ergibt sich ein Horizont, über den die Schnecke nicht hinaus gelangen kann.

Mit

$$r = r_0\, e^{\alpha\, t} \tag{13}$$

wird

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r_0\, e^{\alpha\, t}}\,. \tag{14}$$

Die Integration liefert

$$\varphi = -\frac{v}{\alpha\, r_0}\, e^{-\alpha\, t} + \varphi_0\,. \tag{15}$$

Mit der Anfangsbedingung $t = 0$, $\varphi = 0$ ergibt sich

$$\varphi_0 = \frac{v}{\alpha\, r_0} \tag{16}$$

und damit

$$\varphi = \frac{v}{\alpha\, r_0}\, \left(1 - e^{-\alpha\, t}\right)\,. \tag{17}$$

Für $t \to \infty$ wird

$$\varphi_m = \frac{v}{\alpha\, r_0}\,. \tag{18}$$

Der Winkel φ_m kann von der Schnecke nicht „überschritten“ werden. Der dadurch definierte Horizont liegt zur Zeit $t = 0$ in der Distanz

$$s_0 = r_0\, \varphi_m = \frac{v}{\alpha}\,. \tag{19}$$

Da s_0 nur von der Geschwindigkeit v und vom Expansions-Exponenten α abhängt, kann das Resultat direkt vom Ballon-Modell auf das exponetiell expandierende Universum übertragen werden.

Exponentiell expandierendes Universum

Die Friedmann-Lemaître-Gleichung lautet:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\,\pi\, G}{3}\,\varrho_m + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k\, c^2}{R}\,. \tag{20}$$

Da die Massendichte ϱ_m abnimmt und der Skalenfaktor R zunimmt, überwiegt schliesslich der Term mit der kosmologischen Konstante, und die Gleichung reduziert sich zu

$$H_\infty^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3}\,. \tag{21}$$

Als asymptotische Lösung ergibt sich

$$R = R_0\, e^{H_\infty\, t} \tag{22}$$

mit

$$H_\infty = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\,. \tag{23}$$

Bei der Übertragung des Resultates (19) vom Ballon-Modell auf das Universum ist die Geschwindigkeit v der Schnecke durch die Lichtgeschwindigkeit c zu ersetzen, und für den Faktor α in der Exponentialfunktion muss H_∞ verwendet werden.

Aus den Beziehungen

$$\varrho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\,\pi\,G}\,, \tag{24}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\varrho_\Lambda}{\varrho_{krit}}\,, \tag{25}$$

$$\varrho_{krit} = \frac{3\,H_0^2}{8\,\pi\,G} \tag{26}$$

ergibt sich

$$\Lambda = 3\,\Omega_\Lambda\,H_0^2 \tag{27}$$

und

$$H_\infty = \sqrt{\Omega_\Lambda}\,H_0\,. \tag{28}$$

Mit den Werten

$$H_0 = 70\ \mathrm{kms^{-1}/Mpc} \tag{29}$$

und

$$\Omega_\Lambda = 0.73 \tag{30}$$

wird

$$\Lambda = 1.13 \cdot 10^{-35} \text{ s}^{-2} \tag{31}$$

und

$$H_\infty = 1.94 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} \,. \tag{32}$$

Für s_0 folgt

$$s_0 = \frac{c}{H_\infty} = \frac{2.998 \cdot 10^8}{1.94 \cdot 10^{-18}} = 1.55 \cdot 10^{26} \,, \tag{33}$$

oder, umgerechnet auf Lichtjahre,

$$s_0 = \frac{1.55 \cdot 10^{26}}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 2.998 \cdot 10^8} = 1.63 \cdot 10^{10} \,. \tag{34}$$

Der kosmologische Ereignishorizont ist also in einer Entfernung von 16.3 Milliarden Lichtjahren.

Wikipedia-Artikel „Beobachtbares Universum“:

[...]

Ereignishorizont
Im Gegensatz zum Beobachtungshorizont, der angibt, wie weit Objekte aktuell maximal entfernt sein können, deren Licht uns heute erreicht, gibt der Ereignishorizont an, wie weit ein Objekt heute maximal von uns entfernt sein darf, so dass uns sein Licht irgendwann in der Zukunft noch erreichen wird. Der Ereignishorizont ist demnach deutlich kleiner als der Beobachtungshorizont und liegt etwa in einer Entfernung von 16,2 Mrd. Lichtjahren [...].

22. April 2012

A. Ruh