

Regenerierungszeit eines geothermischen Wärmereservoirs

In einer nicht wasserführenden Gesteinsschicht werde ein Gesteinsvolumen durch ein petrothermales System um die Temperaturdifferenz ΔT unter die Umgebungstemperatur abgekühlt. Es stellt sich die Frage, wie lange es dauert, bis sich nach Beendigung der Wärmeentnahme die Temperatur des Volumens wieder an die Umgebung angeglichen hat. Zur Vereinfachung wird ein kugelförmiges Volumen mit Radius R betrachtet.

Wärmeleitungsgleichung

Wenn keine Arbeit vom oder am System verrichtet wird, gilt wegen des Energieerhaltungssatzes die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0. \quad (1)$$

Dabei ist u die Dichte der inneren Energie und \vec{q} die Wärmestromdichte. Für die zeitliche Änderung der inneren Energiedichte gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2)$$

wobei c die spezifische Wärmekapazität und ρ die Dichte bedeutet.

Die Wärmestromdichte ergibt sich aus dem Temperaturgradienten:

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (3)$$

Einsetzen von (2) und (3) in (1) liefert die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \operatorname{div} \operatorname{grad} T, \quad (4)$$

oder mit dem Laplace-Operator $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}. \quad (5)$$

Lösungsansatz

Das Gestein wird als isotrop und homogen vorausgesetzt. Die Lösung wird daher kugelsymmetrisch sein:

$$T = T(r, t). \quad (6)$$

Mit Hilfe des Produktansatzes

$$T(r, t) = f(t) \cdot g(t) \quad (7)$$

lassen sich die Variablen separieren. Einsetzen von (7) in die Wärmeleitungsgleichung (5) liefert

$$\frac{df}{dt} g = a f \Delta g. \quad (8)$$

und

$$\frac{1}{a} \frac{\dot{f}}{f} = \frac{\Delta g}{g}. \quad (9)$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von r abhängt, müssen beide Seiten gleich einer Konstanten sein. Somit gilt:

$$\frac{1}{a} \frac{\dot{f}}{f} = -\alpha^2 \quad \frac{\Delta g}{g} = -\alpha^2. \quad (10)$$

Die Konstante muss negativ sein, da sonst die Temperatur als Funktion der Zeit exponentiell zunehmen würde.

In Kugelkoordinaten ist

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g}{\partial r}, \quad (11)$$

da g nicht von den Winkeln abhängt.

Mit dem Ansatz

$$h = r g \quad (12)$$

ergibt sich

$$\frac{dh}{dr} = r \frac{dg}{dr} + g \quad (13)$$

und

$$\frac{d^2 h}{dr^2} = r \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{dg}{dr} + \frac{dg}{dr} = r \frac{d^2 g}{dr^2} + 2 \frac{dg}{dr}. \quad (14)$$

Somit ist

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 h}{dr^2} = \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} = \Delta g. \quad (15)$$

Damit wird

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{1}{r g} \frac{d^2 h}{dr^2} = \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dr^2}. \quad (16)$$

und aus (10) folgt

$$\dot{f} = -a \alpha^2 f \quad (17)$$

und

$$h'' = -\alpha^2 h. \quad (18)$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen (17) und (18) sind

$$f = C e^{-a \alpha^2 t} \quad (19)$$

und

$$h = A \cos(\alpha r) + B \sin(\alpha r). \quad (20)$$

Für die Temperaturfunktion ergibt sich damit

$$T = e^{-a \alpha^2 t} \frac{1}{r} [A \cos(\alpha r) + B \sin(\alpha r)]. \quad (21)$$

Dabei wurde die Konstante C gleich 1 gesetzt, was einer Umdefinition der Konstanten A und B entspricht.

Die allgemeine Lösung ist eine Summe der speziellen Lösungen (21):

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a \alpha_n^2 t} \frac{1}{r} [A_n \cos(\alpha_n r) + B_n \sin(\alpha_n r)]. \quad (22)$$

Die möglichen Werte der Konstanten α_n , A_n und B_n werden aus den Anfangs- und Randbedingungen bestimmt.

Anfangs- und Randbedingungen

Zur Zeit $t = 0$ liege die Temperatur im Inneren der Kugel mit Radius R um ΔT unterhalb der Umgebungstemperatur.

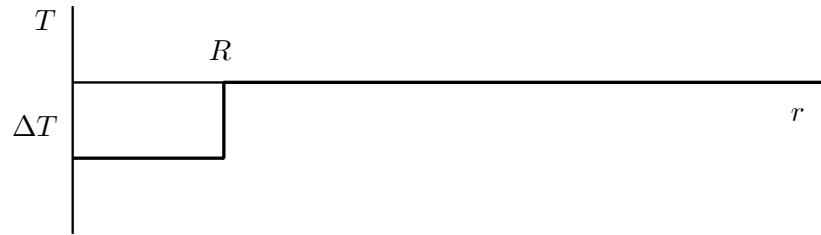
Somit ist

$$T(r, 0) = \Delta T [\Theta(r - R) - 1]. \quad (23)$$

$\Theta(x)$ ist die Theta- oder Heaviside-Funktion. Es ist $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$ und $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$. Abbildung 1 zeigt den Verlauf von $T(r, 0)$.

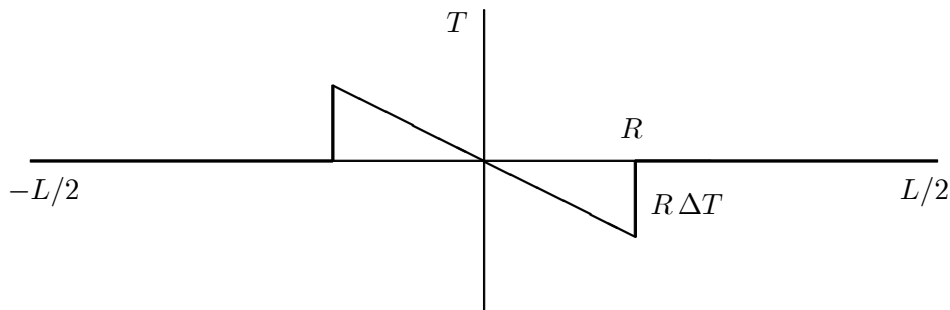
Für $t = 0$ gilt

$$T(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r} [A_n \cos(\alpha_n r) + B_n \sin(\alpha_n r)]. \quad (24)$$

Abbildung 1: Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$

Fourier-Reihe

Damit die Funktion $r T(r, 0)$ als Fourier-Reihe geschrieben werden kann, wird $r T(r, 0)$ zweckmässigerweise in den unphysikalischen Bereich $r < 0$ fortgesetzt und zu einer periodischen Funktion $r F(r)$ erweitert.

Abbildung 2: Periodische Funktion $r F(r)$

$F(r)$ wird im Intervall $-L/2 \leq r \leq L/2$ definiert durch:

$$F(r) = F(-r) = T(r, 0) \quad \text{für } 0 < r \leq L/2. \quad (25)$$

Ferner sei $r F(r)$ periodisch: $(r + L) F(r + L) = r F(r)$. Für L wird ein Abstand gewählt, der so gross ist, dass die Temperaturlausgleichsvorgänge in der Umgebung der Kugel mit Radius R sich nicht mehr auswirken. $L = 10 R$ dürfte hinreichend sein, da dann das Volumen der Kugel mit Radius L tausendmal so gross ist wie das Volumen der Kugel mit Radius R .

Durch diese Festlegungen ist die Gleichung (24) der physikalische relevante Teil der Fourier-Darstellung

$$r F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\alpha_n r) + B_n \sin(\alpha_n r)]. \quad (26)$$

Da $r F(r)$ eine ungerade Funktion ist, sind alle Koeffizienten A_n gleich null.

Wegen der Periodizität von $r F(r)$ muss gelten:

$$\alpha_n L = 2 \pi n \quad (27)$$

also

$$\alpha_n = \frac{2\pi n}{L}. \quad (28)$$

Damit ergibt sich aus (26) die Gleichung

$$r F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{L} r\right). \quad (29)$$

Für die Fourier-Koeffizienten B_n gelten die Beziehungen

$$B_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} r F(r) \sin\left(n \frac{2\pi}{L} r\right) dr. \quad (30)$$

Da $r F(r) \sin(\alpha_n r)$ eine gerade Funktion ist und $F(r)$ nur für $0 \leq r < R$ verschieden von null ist, kann (30) vereinfacht werden zu

$$B_n = -2 \frac{2}{L} \int_0^R r \Delta T \sin\left(n \frac{2\pi}{L} r\right) dr. \quad (31)$$

Die Integration liefert

$$B_n = -\frac{4\Delta T}{L} \left[-\frac{L}{2\pi n} r \cos\left(n \frac{2\pi}{L} r\right) \Big|_0^R + \frac{L}{2\pi n} \int_0^R \cos\left(n \frac{2\pi}{L} r\right) dr \right] = \quad (32)$$

$$= -\frac{4\Delta T}{L} \left[-\frac{L}{2\pi n} r \cos\left(n \frac{2\pi}{L} r\right) \Big|_0^R + \frac{L^2}{4\pi^2 n^2} \sin\left(n \frac{2\pi}{L} r\right) \Big|_0^R \right] = \quad (33)$$

$$= -\frac{4\Delta T}{L} \left(-\frac{L}{2\pi n} R \cos\left(n \frac{2\pi}{L} R\right) + \frac{L^2}{4\pi^2 n^2} \sin\left(n \frac{2\pi}{L} R\right) \right). \quad (34)$$

Somit sind die Fourier-Koeffizienten:

$$B_n = -4\Delta T \left(-\frac{R}{2\pi n} \cos\left(n \frac{2\pi}{L} R\right) + \frac{L}{4\pi^2 n^2} \sin\left(n \frac{2\pi}{L} R\right) \right). \quad (35)$$

Temperaturverlauf

Für die Temperaturfunktion ergibt sich schliesslich:

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\alpha_n^2 t} \frac{1}{r} B_n \sin(\alpha_n r) \quad \alpha_n = \frac{2\pi n}{L}. \quad (36)$$

Als Beispiel wird eine Kugel mit Radius $R = 1000$ m betrachtet. Für L wird $L = 10$ km gewählt.

Für die Stoffparameter werden folgende Werte eingesetzt:

$$\begin{aligned}\rho &= 2700 \text{ kgm}^{-3} \\ c &= 800 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1} \\ \lambda &= 3.0 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}\end{aligned}$$

Es wird vorausgesetzt, dass im ganzen Kugelvolumen $r \leq R$ die Temperatur gleichmässig um ΔT gegenüber der Umgebung abgesenkt wird. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Wärmeentnahme beendet, und aus der Umgebung strömt Wärme nach. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass dann auch im Innern der Kugel kein konvektiver Wärmetransport mehr vorhanden ist und die Wärme allein durch Wärmeleitung transportiert wird. Natürlich strömt schon während der Wärmeentnahme von aussen Wärme in das Innere der Kugel nach. Da die „Zeitkonstante“ dieses Vorganges aber wesentlich grösser ist als diejenige der Wärmeentnahme, kann dieser Effekt in guter Näherung vernachlässigt werden. Während einer typischen Wärmeentnahmedauer von 20 Jahren verändert sich das Temperaturprofil nur unwesentlich (siehe Abbildung 4).

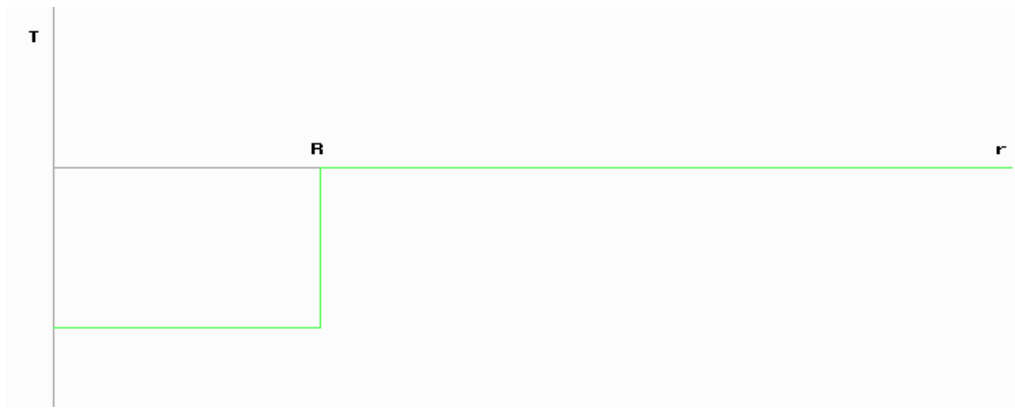


Abbildung 3: Temperaturverlauf zur Zeit $t = 0$

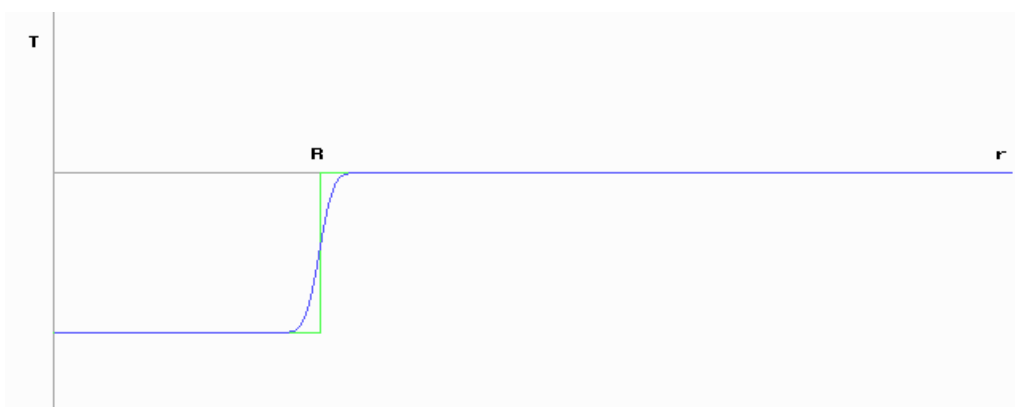


Abbildung 4: Temperaturverlauf nach 20 Jahren

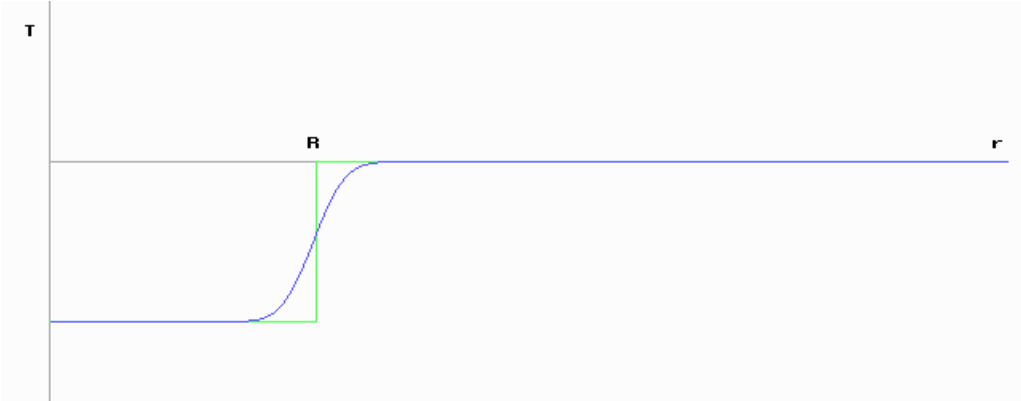


Abbildung 5: Temperaturverlauf nach 100 Jahren

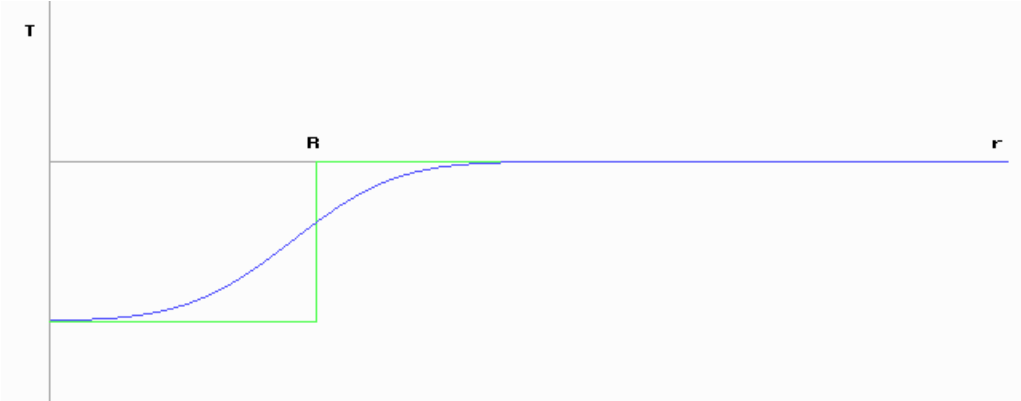


Abbildung 6: Temperaturverlauf nach 1000 Jahren

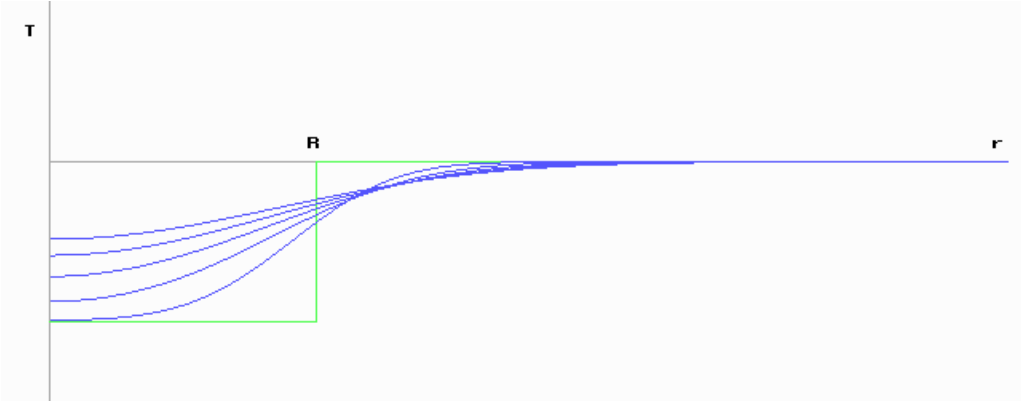


Abbildung 7: Temperaturverlauf nach 1000, 2000, 3000, 4000 und 5000 Jahren

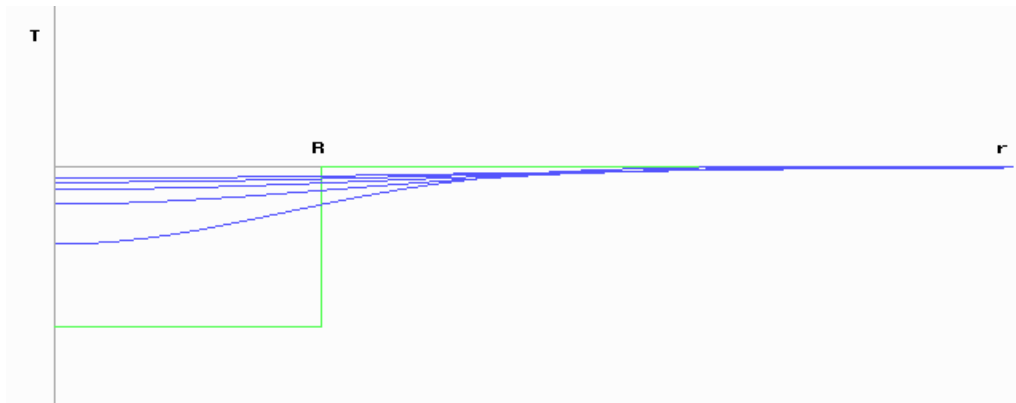


Abbildung 8: Temperaturverlauf nach 5000, 10'000, 15'000, 20'000 und 25'000 Jahren

Nach 5000 Jahren ist die Temperatur im Zentrum der Kugel noch immer um 48 % des ursprünglichen Wertes ΔT tiefer als die der Umgebung, d.h. $T(0, 5000a) = T_U - 0.48 \Delta T$. Nach 10'000 Jahren beträgt die Temperaturniedrigung noch 23 % und nach 20'000 Jahren noch 10 % des ursprünglichen Wertes.

Die folgenden Bilder zeigen die Temperaturverläufe für eine Kugel mit Radius $R = 500$ m.

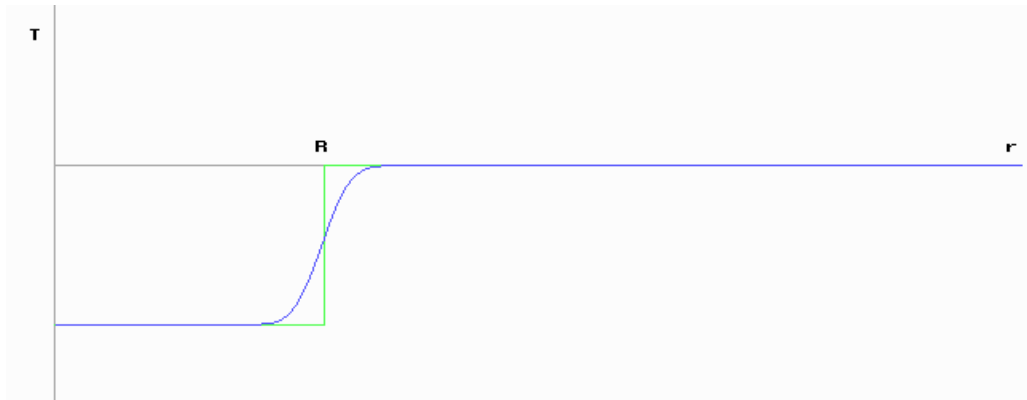


Abbildung 9: Temperaturverlauf nach 20 Jahren

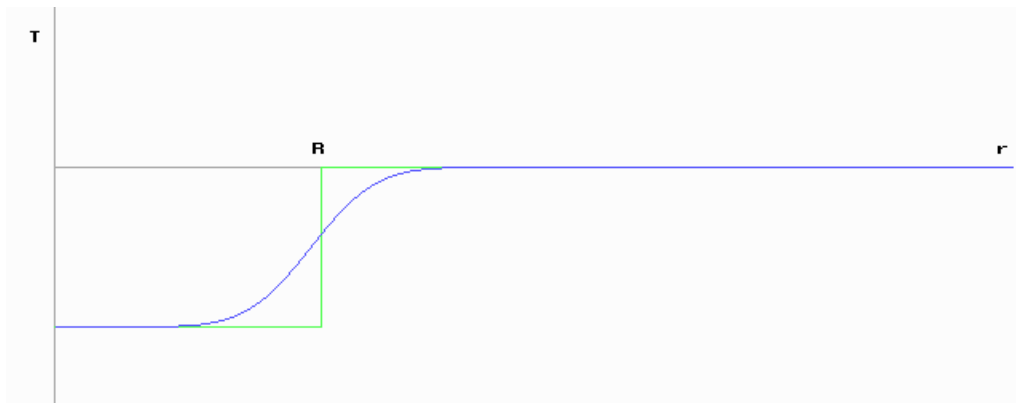


Abbildung 10: Temperaturverlauf nach 100 Jahren

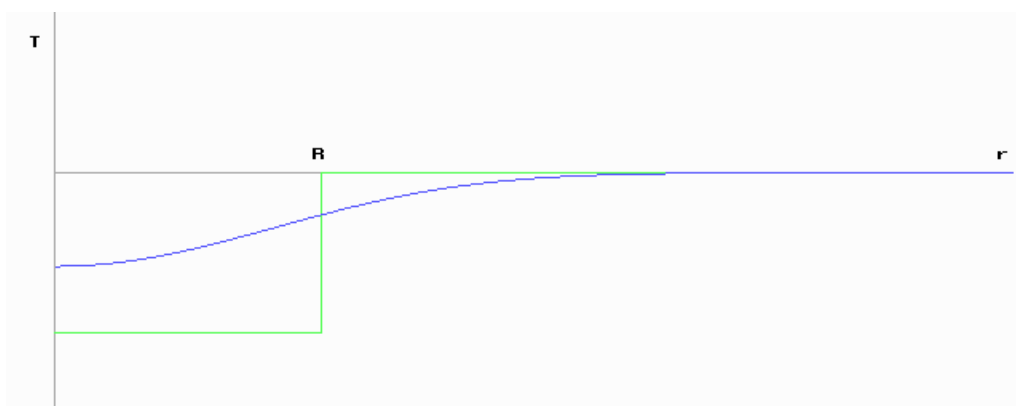


Abbildung 11: Temperaturverlauf nach 1000 Jahren

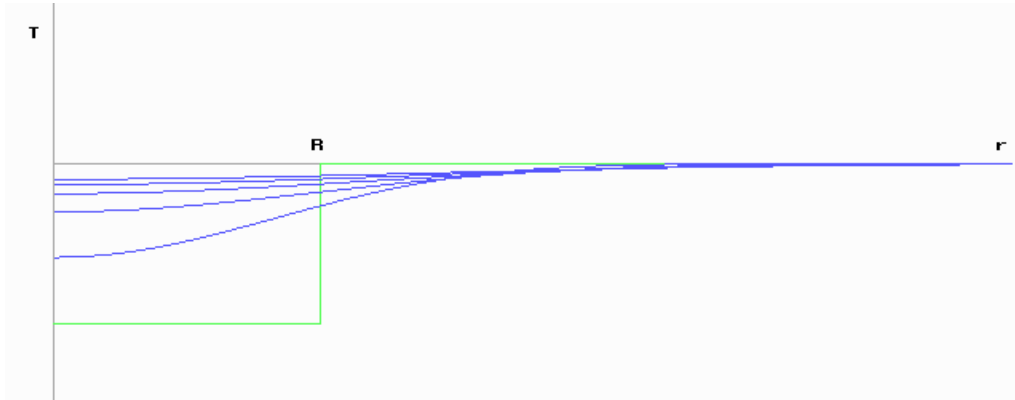


Abbildung 12: Temperaturverlauf nach 1000, 2000, 3000, 4000 und 5000 Jahren

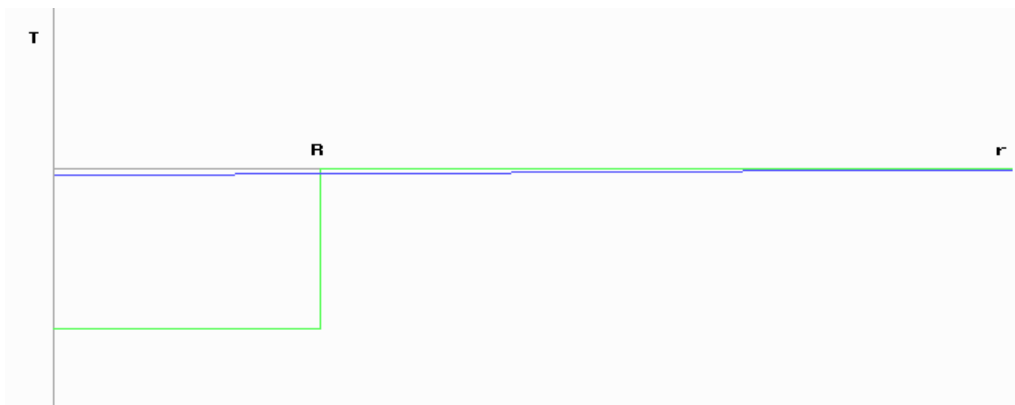


Abbildung 13: Temperaturverlauf nach 10'000 Jahren

Nach 1000 Jahren ist die Temperaturabsenkung auf 59 % des Anfangswertes gesunken, nach 5000 Jahren auf 10 % und nach 10'000 Jahren auf 3.7 %.

Realitätstreue

Das verwendete Modell ist vor allem aus den folgenden Gründen etwas unrealistisch.

Erstens ist die Gesteinsschicht in vertikaler Richtung durch die Erdoberfläche begrenzt. Die Tiefe h , in der sich das Zentrum des betrachteten kugelförmigen Volumens befindet, ist möglicherweise nicht genügend gross verglichen mit dem Radius R . Für die Rechnung wurde $L = 10 R$ angenommen. Mit $R = 500$ m müsste $h > L = 5000$ m sein. Allerdings ergeben sich auch für $L = 2500$ m nahezu die gleichen Resultate, insbesondere für Zeiten, die nicht grösser sind als 5000 Jahre.

Zweitens ist im allgemeinen das Gestein geschichtet, und somit ist die Annahme, dass λ ortsunabhängig sei, nicht gerechtfertigt. Die Wärmeleitfähigkeit variiert jedoch für verschiedene Gesteinsarten nicht sehr stark.

Drittens ist die Temperatur im Gestein nicht konstant, sondern nimmt in vertikaler Richtung nach oben ab. Dies wird aber weitgehend dadurch kompensiert, dass die Temperatur in vertikaler Richtung nach unten zunimmt.

Trotz dieser Mängel dürften die Resultate, die mit diesem Modell erhalten werden, mindestens grössenordnungsmässig richtig sein.

Energieinhalt

Durch das Abkühlen einer Gesteinsschicht mit einem Volumen V um die Temperaturdifferenz ΔT kann die thermische Energie

$$Q = cm \Delta T = c \rho V \Delta T \quad (37)$$

gewonnen werden. Ein geothermisches Kraftwerk, das mit dem Wirkungsgrad η arbeitet, kann daraus während der Zeit t die elektrische Leistung P liefern. Mit

$$P t = \eta Q \quad (38)$$

wird

$$t = \frac{\eta c \rho V \Delta T}{P}. \quad (39)$$

Für eine würfelförmige Gesteinsschicht¹ mit einer Kantenlänge von 1 km ergibt sich für $c = 800 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$, $\rho = 2700 \text{ kgm}^{-3}$ und $P = 10 \text{ MW}$ bei einem (eher optimistisch gerechneten) Wirkungsgrad von 15 % :

$$t = \frac{0.15 \cdot 800 \cdot 2700 \cdot (10^3)^3 \cdot 20}{10^7} = 6.48 \cdot 10^8. \quad (40)$$

$6.48 \cdot 10^8$ Sekunden sind 20.5 Jahre.

Durch die Abkühlung einer Gesteinsschicht von 1 km^3 um 20 Grad kann also ein geothermisches Kraftwerk während 20 Jahren eine elektrische Leistung von 10 MW liefern.

¹ Das Volumen eines Würfels mit einer Kantenlänge von 1 km ist 1.91 mal grösser als das Volumen einer Kugel mit einem Durchmesser von 1 km.

Anhang: Pascal-Programm

```
Program geotherm;  
{Das Programm berechnet die Zeit für die  
Regenerierung eines geothermischen Reservoirs.}  
{12.10., 13.10. 2011, A. Ruh}
```

```
{N+}
```

```
uses crt, dos, graph, grphdriv, grphfnt0;
```

```
const
```

```
  rho = 2700.0;  
  c   = 800.0;  
  lam = 3.00;  
  dt  = 20.0;  
  L   = 1.0e4;  
  r0  = 1.0e3;  
  ys  = 3.154e7;  
  sx  = 6.0;  
  sy  = 5.0;  
  x0  = 30;  
  y0  = 100;
```

```
var
```

```
  gd : integer;  
  gm : integer;  
  i  : integer;  
  j  : integer;  
  k  : integer;  
  xi : integer;  
  yi : integer;  
  a  : extended;  
  b  : extended;  
  r  : extended;  
  s  : extended;  
  t  : extended;  
  t0 : extended;  
  tr : extended;
```

```
begin
```

```
  gd:=detect;  
  initgraph(gd, gm, '\tp7\bgi');  
  clearviewport;  
  bar(0,0,639,479);  
  setfillstyle(1,15);  
  setcolor(7);  
  line(x0,y0,630,y0);  
  line(x0,0,x0,250);  
  setcolor(10);
```

```

xi:=x0+round(r0/sx);
yi:=y0+round(sy*dt);
line(x0,yi,xi,yi);
line(xi,y0,xi,yi);
line(xi,y0,630,y0);
setcolor(9);
a:=lam/(rho*c);
for i:=1 to 1 do
begin
  t:=i*ys*10000;
  for j:=1 to 600 do
  begin
    r:=sx*j;
    s:=0.0;
    for k:=1 to 100 do
    begin
      b:=-4*dt*(-r0/(2*pi*k)*cos(2*k*pi*r0/L)
        +L/(4*pi*pi*k*k)*sin(2*k*pi*r0/L));
      s:=s+exp(-a*sqr(2*k*pi/L)*t)*b/r*sin(2*k*pi*r/L);
    end;
    tr:=sy*s;
    yi:=y0-round(tr);
    xi:=x0+j;
    if j=1 then
    begin
      moveto(x0+1,yi);
      t0:=-100*s/dt;
    end
    else
      lineto(xi,yi);
    end;
  end;
setcolor(0);
outtextxy(15,15,'T');
outtextxy(620,y0-15,'r');
xi:=x0+round(r0/sx)-5;
outtextxy(xi,y0-15,'R');
readkey;
closegraph;
restorecrtmode;
write('t0/Delta t = ',t0:5:1,' %');
readkey;
end.

```