

Kettenfontäne

Der Mould-Effekt

Steve Mould zeigte im Jahr 2013 ein YouTube-Video, das grosse Beachtung fand und von mehr als zwei Millionen Menschen angeschaut wurde. Wird das eine Ende einer in einem Gefäss liegenden Kugelmkette über den Gefässrand aussen heruntergezogen und dann losgelassen, rutscht die Kette nicht einfach über den Gefässrand nach unten, sondern steigt steil nach oben weit über den Gefässrand hinaus, bevor sie nach unten fällt.



Abbildung 1: Kettenfontäne
(Bild: The New York Times, March 3, 2014 [1])

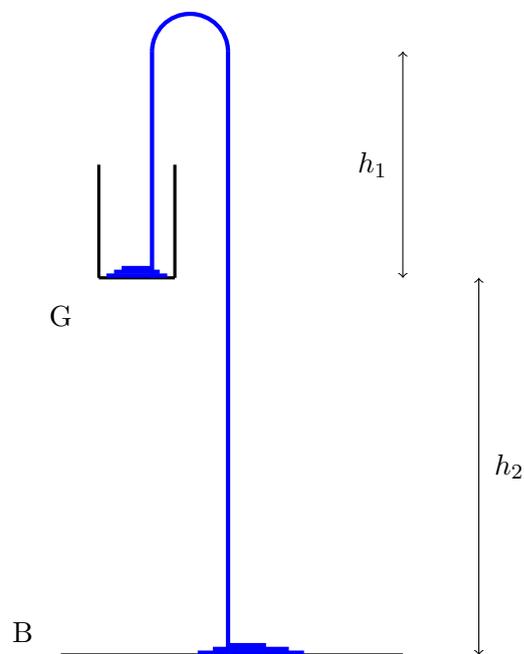


Abbildung 2: Die Kette steigt aus dem Gefäss G hoch und fällt dann auf den Boden B

Die Bewegungsgleichungen

Das Phänomen wurde von Biggins und Warner erklärt [2].

Die hier verwendete Notation weicht von der Darstellung von Biggins und Warner etwas ab.

Es wird der stationäre Zustand betrachtet, in dem sich die Kette gleichförmig bewegt. Ausser an den beiden Enden wirken keine resultierenden tangentialen Kräfte auf die Kettenelemente. Hingegen tritt im gekrümmten Bereich der Kette eine Radialbeschleunigung auf.

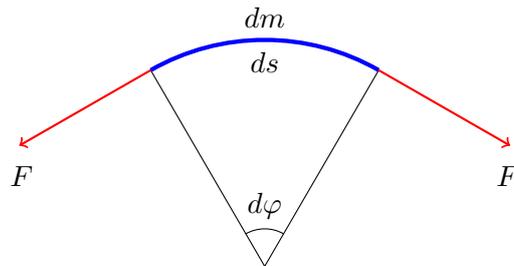


Abbildung 3: Kräfte im gekrümmten Bereich der Kette

Für ein Kettenelement der Masse dm gilt

$$2 F \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{dm v^2}{r} . \quad (1)$$

Da für kleine Winkel $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$ gesetzt werden kann, ist

$$F d\varphi = \frac{dm v^2}{r} . \quad (2)$$

Wenn mit μ die Masse der Kette pro Längeneinheit bezeichnet wird, ergibt sich

$$dm = \mu ds = \mu r d\varphi \quad (3)$$

und somit

$$F = \mu v^2 . \quad (4)$$

Die Zugkräfte, die an den Enden des gekrümmten Kettenteils wirken, sind offenbar unabhängig vom Winkel, den der gekrümmte Kettenteil einschliesst.

Da sich im stationären Zustand die Kette gleichförmig bewegt, gelten für die Kräfte an den Kettenteilen die folgenden Beziehungen (vgl. Abbildung 4):

$$F - \mu h_1 g - F_1 = 0 \quad (5)$$

$$F - \mu (h_1 + h_2) g - F_2 = 0 \quad (6)$$

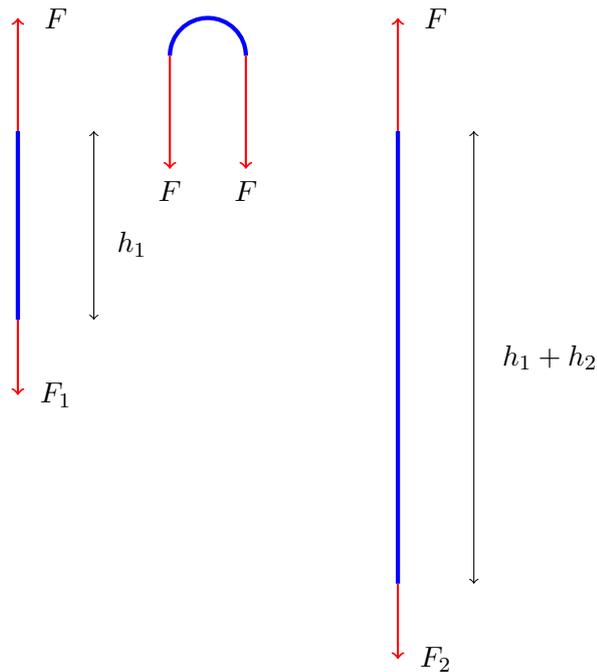


Abbildung 4: Kräfte an den Kettenteilen

Als Modell der einzelnen Kettenglieder können kleine starre Quader der Länge b betrachtet werden, die durch ideal-flexible Fäden verbunden sind (Abbildung 5).

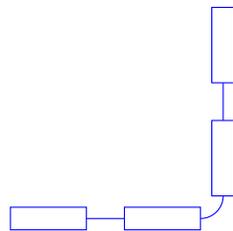


Abbildung 5: Kettenglieder

Beim Abheben eines Kettenglieds von einer Unterlage wirkt ausser der Zugkraft F_1 des oberen Kettenglieds auch eine Auflagekraft F_A von der Unterlage.

Das Newtonsche Gesetz liefert die Beziehung

$$F_1 + F_A = m a . \quad (7)$$

Da die Beschleunigung, mit der ein Kettenglied in Bewegung gesetzt wird, weitaus grösser ist als die Erdbeschleunigung g , kann das Gewicht $G = m g$ gegenüber dem Term $m a$ vernachlässigt werden.

Ein Kettenglied wird beim Abheben im wesentlichen auf der Strecke b von der Geschwindigkeit null auf die Geschwindigkeit v der Kette beschleunigt. Somit ist die Beschleunigung

$$a = \frac{v^2}{2b} . \quad (8)$$

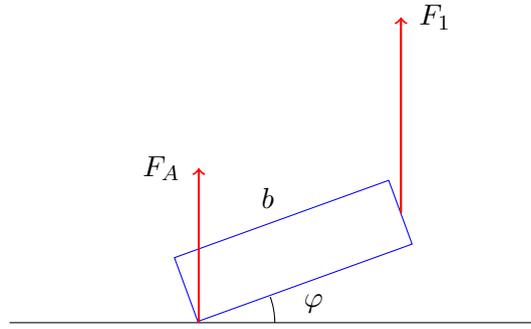


Abbildung 6: Kräfte auf ein Kettenglied am Boden des Gefässes G

Im stationären Zustand ist die Geschwindigkeit der Kette im wesentlichen gegeben durch

$$v = \sqrt{2 g h_2}, \quad (9)$$

wobei h_2 die Netto-Fallhöhe der Kette ist. Damit wird

$$a = \frac{h_2}{b} g. \quad (10)$$

Da die Fallhöhe in der Größenordnung von 1 Meter ist, die Länge der Kettenglieder aber nur etwa 1 cm beträgt, wird

$$a \approx 100 g, \quad (11)$$

also ist $m g$ gegenüber $m a$ vernachlässigbar.

Für die Änderung des Drehimpulses gilt die Beziehung

$$F_1 \frac{b}{2} \cos \varphi - F_A \frac{b}{2} \cos \varphi = J \ddot{\varphi}. \quad (12)$$

J ist das Trägheitsmoment des Quaders bezüglich der Achse, die durch seinen Massenmittelpunkt geht und senkrecht zur vertikalen Ebene steht. Genau genommen wäre das Drehmoment der Kraft F_A gegeben durch

$$M = -F_A \left(\frac{b}{2} \cos \varphi - \frac{a}{2} \sin \varphi \right), \quad (13)$$

wobei a die Höhe des Quaders bedeutet. Da aber zur Abschätzung der Kräfte nur der erste Moment des Abhebens betrachtet wird, in dem $\varphi \approx 0$ ist, gilt $\cos \varphi \approx 1$ und $\sin \varphi \approx 0$ und damit

$$(F_1 - F_A) \frac{b}{2} = J \ddot{\varphi}. \quad (14)$$

Ferner ist

$$a = \frac{b}{2} \ddot{\varphi}, \quad (15)$$

womit

$$F_1 - F_A = 4 \frac{J}{b^2} a \quad (16)$$

folgt. Subtraktion der Gleichung (16) von Gleichung (7) liefert

$$2F_A = m a - 4 \frac{J}{b^2} a. \quad (17)$$

Statt dass die Newtonsche Gleichung (7) für ein einzelnes Kettenglied aufgestellt wird, kann die Kette auch als ein Kontinuum betrachtet werden. Dann gilt

$$F_1 + F_A = \frac{dp}{dt}. \quad (18)$$

Die Impulsänderung dp im Zeitintervall dt ist gegeben durch

$$dp = dm v = \mu ds v = \mu v dt v, \quad (19)$$

und damit wird

$$\frac{dp}{dt} = \mu v^2. \quad (20)$$

Also ist

$$F_1 + F_A = \mu v^2. \quad (21)$$

Da

$$m a = m \frac{v}{\Delta t} = \frac{m}{b} \frac{b}{\Delta t} v = \mu v v = \mu v^2, \quad (22)$$

stimmt Gleichung (7) mit Gleichung (21) überein.

Für die Kettenglieder, die auf dem Boden aufsetzen (s. Abbildung 7), ergibt sich analog:

$$F_2 + F_B = \mu v^2. \quad (23)$$

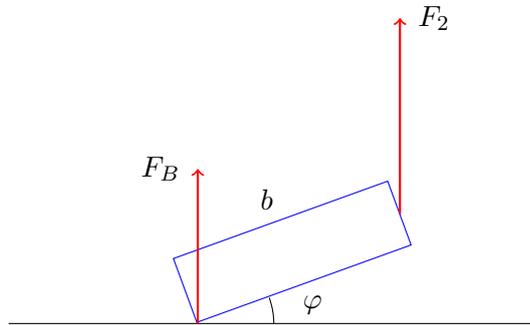


Abbildung 7: Kräfte auf ein Kettenglied auf dem Boden

Für die Auflagekräfte F_A und F_B kann der Ansatz

$$F_A = \alpha \mu v^2 \quad (24)$$

$$F_B = \beta \mu v^2 \quad (25)$$

gemacht werden¹.

Werden (24) und (25) in (21) und (23) eingesetzt, ergibt sich

$$F_1 = (1 - \alpha) \mu v^2 \quad (26)$$

$$F_2 = (1 - \beta) \mu v^2. \quad (27)$$

¹ Biggins und Warner setzen etwas inkonsequent statt der Auflagekraft $F_B = \beta \mu v^2$ die Kettenkraft $F_2 = \beta \mu v^2$ (in ihrer Notation $T_F = \beta \lambda v^2$).

Einsetzen von (26) und (27) sowie (4) in (5) und (6) liefert

$$\mu v^2 = (1 - \alpha) \mu v^2 + \mu h_1 g \quad (28)$$

$$\mu v^2 = (1 - \beta) \mu v^2 + \mu (h_1 + h_2) g. \quad (29)$$

Dies lässt sich sofort vereinfachen zu

$$\alpha v^2 = h_1 g \quad (30)$$

$$\beta v^2 = (h_1 + h_2) g. \quad (31)$$

Daraus folgt

$$(\beta - \alpha) v^2 = h_2 g, \quad (32)$$

und es ergibt sich schliesslich:

$$\boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{\alpha}{\beta - \alpha}}. \quad (33)$$

Einsetzen von (24) in Gleichung (17) liefert

$$2 \alpha \mu v^2 = m a \left(1 - 4 \frac{J}{m b^2} \right), \quad (34)$$

und mit (22) folgt daraus

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(1 - 4 \frac{J}{m b^2} \right). \quad (35)$$

Bei einer Kugelkette braucht es 6 Kugeln für eine Umlenkung um etwa 180° (s. Abbildung 8).



Abbildung 8: Kugelkette

Daher können 3 Kugeln zusammen als ein Kettenglied betrachtet werden (s. Abbildung 9).

Es ist $r = 1.5$ mm, $c = 4.5$ mm und $b = 12$ mm, also gilt

$$c = 3r \quad \text{und} \quad r = \frac{b}{8}. \quad (36)$$

Für das Kettenglied in Abbildung 9 ergibt sich das Trägheitsmoment

$$J = \frac{2}{5} \frac{m}{3} r^2 + 2 \frac{m}{3} \left(\frac{2}{5} r^2 + c^2 \right). \quad (37)$$

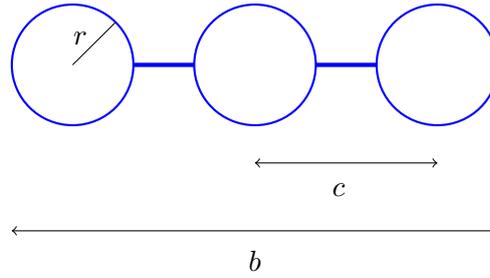


Abbildung 9: Drei Kugeln als ein Kettenglied

Mit den Beziehungen (36) wird daraus $J = 0.100 m b^2$. Für einen Quader gilt

$$J = \frac{m b^2}{12} \quad (38)$$

und somit wäre $J = 0.0833 m b^2$ für quaderförmige Kettenglieder.

Biggins und Warner [2] verwenden für das Trägheitsmoment des aus drei Kugeln bestehenden Kettenglieds die Beziehung

$$J = 2 \frac{m}{3} \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{m b^2}{6} = 0.166 m b^2, \quad (39)$$

was offensichtlich eine etwas starke Vereinfachung ist.

Aus den Gleichungen (5) und (6) folgt

$$F_1 - F_2 = \mu (h_1 + h_2) g - \mu h_1 g = \mu h_2 g, \quad (40)$$

und die Gleichungen (26) und (27) liefern

$$F_1 - F_2 = (\beta - \alpha) \mu v^2. \quad (41)$$

Der Vergleich der beiden Beziehungen (40) und (41) ergibt

$$\beta - \alpha = \frac{h_2 g}{v^2}. \quad (42)$$

Wenn ein Kettenglied sich vom Gefäß G auf den Boden B bewegt, wird die potentielle Energie $m g h_2$ freigesetzt, und das Kettenglied erhält die kinetische Energie

$$\frac{m v^2}{2}. \quad (43)$$

Im Zeitintervall dt wird ein Kettenstück der Länge $ds = v dt$ aus dem Gefäß hochgezogen und erhält den Impuls

$$dp = dm v = \mu ds v = \mu v dt v = \mu v^2 dt. \quad (44)$$

Die dazu erforderliche Kraft μv^2 leistet die Arbeit $\mu v^2 ds = m v^2$, die von der potentiellen Energie $m g h_2$ geliefert wird: $m v^2 = m g h_2$.

Es wird somit nur die Hälfte der freiwerdenden potentiellen Energie in kinetische Energie umgesetzt:

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} m g h_2. \quad (45)$$

Damit ergibt sich aus (42) die Beziehung

$$\beta - \alpha = 1, \quad (46)$$

und Gleichung (33) vereinfacht sich zu

$$\boxed{\frac{h_1}{h_2} = \alpha}. \quad (47)$$

Die Beziehung (35) liefert

$$\alpha = \frac{1}{2} (1 - 4 \cdot 0.100) = 0.300 \quad (48)$$

für die Kugelkette und

$$\alpha = \frac{1}{2} (1 - 4 \cdot 0.0833) = 0.333 \quad (49)$$

für die Quaderkette.

Für das Verhältnis h_1/h_2 ergibt sich also

$$\frac{h_1}{h_2} = 0.300 \quad (50)$$

für die Kugelkette und

$$\frac{h_1}{h_2} = 0.333 \quad (51)$$

für die Quaderkette.

Experimentell wurde

$$\frac{h_1}{h_2} = 0.14 \quad (52)$$

gefunden.

Die Überlegungen, die zu den Gleichungen (40) bis (42) und Gleichung (46) führen, fehlen in der Publikation von Biggins und Warner. Statt dessen betrachten sie den Fall $\beta \approx 0$ (was in der hier verwendeten Notation dem Fall $\beta \approx 1$ entspricht), ohne das genauer zu begründen. Damit erhalten sie mit ihrem $J = 0.166 \text{ m b}^2$ und $\alpha = 1/6$ für h_1 den Wert $h_1 \approx h_2/5$ (in ihrer Notation: $h_2 \approx h_1/5$).

Wenn bei der Umwandlung der potentiellen Energie in kinetische Energie zusätzliche Verluste auftreten, gilt statt der Gleichung (45) die Beziehung

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} \eta m g h_2, \quad (53)$$

wobei η den „Wirkungsgrad“ bedeutet. Dann liefert (42)

$$\beta - \alpha = \frac{1}{\eta}. \quad (54)$$

Wird $\eta = 0.5$ gesetzt, ist $\beta - \alpha = 2$ und

$$\boxed{\frac{h_1}{h_2} = \frac{\alpha}{2}}. \quad (55)$$

Damit ist

$$\frac{h_1}{h_2} = 0.150 \quad (56)$$

für die Kugelkette und

$$\frac{h_1}{h_2} = 0.167 \quad (57)$$

für die Quaderkette, was mit den experimentellen Werten besser übereinstimmt.

Die Publikationen von Biggins/Warner und Schlichting/Ucke

Notation

J.S. Biggins, M. Warner, *Understanding the Chain Fountain* [2]

H.J. Schlichting, C. Ucke, *Die sprudelnde Kettenfontäne* [3]

Binning, Warner		Schlichting, Ucke	A.R.
T_T	→	T_G	F_1
T_F	→	T_B	F_2
R	→	T_R	F_A
λ	→	λ	μ

Gleichungen

Biggins, Warner:

$$T_T + R = \lambda v^2 \quad (0.4)$$

$$R = \alpha \lambda v^2 \quad T_F = \beta \lambda v^2 \quad (0.5)$$

$$h_2/h_1 = \alpha/(1 - \alpha - \beta) \quad v^2 = h_1 g/(1 - \alpha - \beta) \quad (0.6)$$

Schlichting, Ucke:

$$T_G + T_R = \lambda v^2 \quad (58)$$

$$T_G = \alpha \lambda v^2 \quad T_R = \beta \lambda v^2 \quad (59)$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\alpha}{(1 - \alpha - \beta)} \quad \text{und} \quad v = \frac{h_1 g}{(1 - \alpha - \beta)} \quad (60)$$

In der zweiten Gleichung (60) sollte v^2 stehen.

Die Gleichungen (59) sind falsch. Aus (58) und (59) würde nämlich sofort

$$\alpha + \beta = 1 \tag{61}$$

folgen, also

$$(1 - \alpha - \beta) = 0, \tag{62}$$

womit h_2/h_1 und v^2 in den Gleichungen (60) gegen Unendlich gehen würden.

Mit der Notation von Schlichting und Ucke folgt aus den Gleichungen (0.5) von Binning und Warner nicht (59), sondern

$$T_R = \alpha \lambda v^2 \quad T_B = \beta \lambda v^2. \tag{63}$$

Literaturverzeichnis

- [1] [The New York Times, March 3, 2014](#)
- [2] <http://arxiv.org/pdf/1310.4056v2.pdf>
- [3] http://www.wiley-vch.de/berlin/journals/phiuz/14-05/Webtext_Kettenfontaene.pdf