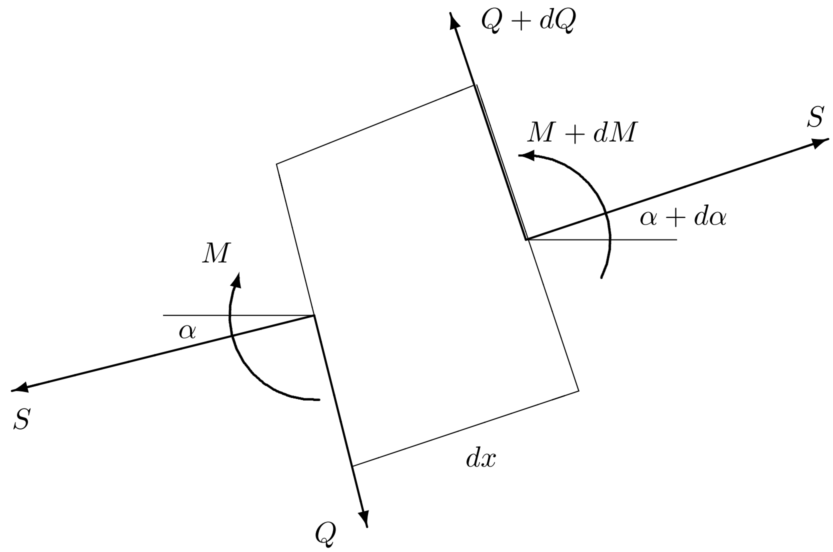
Differentialgleichung für eine biegesteife Saite

Es wird ein Massenelement mit der Masse dm und der Länge dx betrachtet.



Die Achse der nicht ausgelenkten Saite sei die x-Achse. Für die Bewegung des Massenelementes in der y-Richtung gilt:

$$(Q + dQ)\cos(\alpha + d\alpha) - Q\cos\alpha + S\sin(\alpha + d\alpha) - S\sin\alpha = dm\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,. \tag{1}$$

S ist die Spannkraft der Saite.

Für kleine Auslenkungen der Saite ist auch der Winkel α klein und es gilt in guter Näherung $\cos\alpha = \cos(\alpha + d\alpha) = 1$ und $\sin\alpha = \alpha$. Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$dQ + S\,d\alpha = dm\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,. \tag{2}$$

Mit

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \qquad d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\,dx \qquad \alpha = \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad d\alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx \qquad dm = \mu\,dx \tag{3}$$

ergibt sich nach Kürzen von dx:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,. \tag{4}$$

Für die Rotation des Massenelementes gilt die Gleichung

$$dM + Q\,dx = \int \eta^2 dm^*\,\frac{\partial \omega}{\partial t}\,. \tag{5}$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Rotation:

$$\omega = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}\,. \tag{6}$$

Für das (noch kleinere) Massenelement dm^* gilt:

$$dm^* = \varrho\, dx\, b(\eta)\, d\eta\,. \tag{7}$$

η ist der Abstand des Massenelementes dm^* von der Neutralachse, und $b(\eta)$ ist die Breite des Querschnitts in diesem Abstand.

Damit ergibt sich für das Integral:

$$\int \eta^2 dm = \varrho\, dx \int \eta^2\, b\, d\eta = \varrho\, dx\, J\,, \tag{8}$$

wobei J das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts ist.

Damit und mit

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x} \qquad \text{und} \qquad dM = \frac{\partial M}{\partial x}\, dx \tag{9}$$

ergibt sich aus Gleichung (5) nach Kürzen mit dx:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + Q = \varrho\, J\, \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial x}\,. \tag{10}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \varrho\, J\, \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\,. \tag{11}$$

Einsetzen in Gleichung (4) liefert:

$$\varrho\, J \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + S\, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\,. \tag{12}$$

Aus der Differentialgleichung für die elastische Linie [Zi1]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{E\, J} \tag{13}$$

(E ist der Elastizitätsmodul) folgt:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = E\, J\, \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\,. \tag{14}$$

Damit ergibt sich schliesslich die Differentialgleichung für die biegungssteife Saite:

$$\boxed{E\, J\, \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - S\, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \varrho\, J\, \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial x^2} + \mu\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}\,. \tag{15}$$

E, J, ϱ und μ wurden als unabhängig vom Ort x angenommen.

Ziegler [Zi2] betrachtet die Biegeschwingungen eines Balkens, der keiner Spannkraft ausgesetzt ist. Daher fehlt in Referenz [Zi2] der zweite Term (zu Recht).

In Referenz [Sc] fehlt der dritte Term. Schäfer verwendet statt der Gleichung (10) die Beziehung

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q\,. \tag{16}$$

die jedoch nur im statischen Fall gilt, d.h. er berücksichtigt nicht das Massenträgheitsmoment des Massenelements.

Literatur

Zi1 E. Meissner und H. Ziegler
Mechanik I
Birkhäuser, Basel 1948.

Zi2 Hans Ziegler
Mechanik III
Birkhäuser, Basel 1952.

Sch Otto Schaefer
Die Schwingungen biegungssteifer Saiten
Ann. d. Phys. (4) 62, 156-164 (1920).

23. Mai 2013
A. Ruh