Senkrechter freier Fall

Die Raumzeitkrümmung in der Schwarzschildmetrik [1] zeigt sich unter anderem darin, dass die Zeit in der Nähe des Zentralkörpers langsamer läuft. Um diesen Effekt zu veranschaulichen, soll die Zeit für einen freien Fall einerseits im System eines weit entfernten Beobachters und andererseits im fallenden System (d.h. die Eigenzeit τ) berechnet werden.

Klassisch

Aus dem Energiesatz

$$\frac{m\,v^2}{2} - \frac{G\,m\,M}{r} = -\frac{G\,m\,M}{r_1} \tag{1}$$

ergibt sich sofort die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{2\,G\,M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)}\,. \tag{2}$$

G ist die Gravitationskonstante, M ist die Masse des Zentralkörpers und r_1 ist der Abstand zum Zeitpunkt $t = 0$.

Da nicht $r(t)$, sondern $t(r)$ gesucht ist, muss für die Integration der Reziprokwert

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{2\,G\,M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)}} \tag{3}$$

verwendet werden.

Die Fallzeit ist gegeben durch das Integral

$$t = \int\limits_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{2\,G\,M\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)}} \tag{4}$$

r_2 ist ein Radius, der beliebig nahe beim Schwarzschildradius

$$r_s = 2\,\frac{G\,M}{c^2} \tag{5}$$

liegen kann. Wird die dimensionslose Variable

$$x = \frac{r}{r_s} \tag{6}$$

eingeführt, ergibt sich das Integral

$$t = \frac{r_s}{c}\int\limits_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}}}\,. \tag{7}$$

Wenn bei der numerischen Integration von aussen nach innen summiert wird, ist für den ersten Summanden $x = x_1$. Somit verschwindet der Nenner und dieser Summand wird unendlich. Da der Probekörper an der Stelle $x = x_1$ aus der Ruhe losgelassen wird, ist die Geschwindigkeit während des ganzen ersten Integrationsschrittes dx gleich null und damit die für die Strecke dr benötigte Zeit gleich unendlich. Das kann vermieden werden, entweder indem schon vor der Berechnung des ersten Terms der Schritt $x \to x - dx$ ausgeführt wird oder indem für das erste Zeitintervall die Beziehung

$$dt = \sqrt{\frac{2}{g}\, dr} = \sqrt{\frac{2\, r^2}{G\, M}\, dr} = \sqrt{\frac{4\, r_s^2}{c^2}\, dx\, x} \tag{8}$$

verwendet wird. Mit beiden Verfahren wird keine befriedigende Genauigkeit erreicht. Besser ist es, wenn von innen nach aussen integriert wird.

Relativistisch

Wenn der Probekörper keinen Bahndrehimpuls hat, ergibt sich in der Schwarzschildmetrik für die Eigenzeit der Fallbewegung formal die gleiche Beziehung wie in der klassischen Mechanik [2]:

$$\frac{d\tau}{dr} = \frac{1}{\sqrt{2\, G\, M \left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}\right)}}\,. \tag{9}$$

Die Umrechnung von der Eigenzeit τ auf die Zeit t eines in grosser Entfernung ruhenden Beobachters liefert den zusätzlichen Faktor [3]

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1 - \dfrac{r_s}{r}} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}\,. \tag{10}$$

Damit wird die Fallzeit:

$$t = \frac{r_s}{c} \int\limits_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_1}}}\,. \tag{11}$$

Fallzeiten

Fallzeit klassisch

$$\boxed{t_k = \frac{r_s}{c} \int\limits_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_1}}}} \tag{12}$$

Fallzeit relativistisch

$$\boxed{t_r = \frac{r_s}{c} \int\limits_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_1}}}} \tag{13}$$

Beispiele

$r_s = 3$ km

$x_1 = 10^3 \qquad x_2 = 1.0 + 10^{-16}$

$t_k = 0.4954$ s $\qquad t_r = 0.4967$ s

Es mag erstaunlich scheinen, dass der Unterschied zwischen der Eigenzeit und der Zeit des weit entfernten Beobachters so gering ist. Der Faktor $dt/d\tau$ wirkt sich jedoch erst für Abstände r aus, die nur wenig grösser sind als der Schwarzschildradius r_s, d.h. nur die allerletzten Zeitintervalle erscheinen vergrössert, aber diese geben in der gesamten Fallzeit keinen wesentlichen Beitrag. Der Zeitunterschied macht sich nur dann deutlich bemerkbar, wenn der Fall in unmittelbarer Nähe des Schwarzschildradius betrachtet wird.

$x_1 = 1.0 + 10^{-8} \qquad x_2 = 1.0 + 10^{-16}$

$t_k = 1.98 \cdot 10^{-9}$ s $\qquad t_r = 1.97$ s

Für den in grosser Entfernung ruhenden Beobachter erreicht der fallende Körper den Schwarzschildradius in unendlich langer Zeit. Er kommt ihm jedoch in endlicher Zeit beliebig nahe.

Analytische Integration

Für den Bereich $x < 1 + \varepsilon,\ \varepsilon \ll 1$ können die Integranden der Integrale 7 und 11 nach Potenzen von ε entwickelt werden, worauf die Integrale sich analytisch berechnen lassen.

Klassisch

$$t = \frac{r_s}{c} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_1}}} \tag{14}$$

$$x = 1 + \varepsilon \quad x_1 = 1 + \varepsilon_1 \quad x_2 = 1 + \varepsilon_2 \tag{15}$$

$$t = \frac{r_s}{c} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon}} \tag{16}$$

$$-\varepsilon = y \quad d\varepsilon = -dy \tag{17}$$

$$t = -\frac{r_s}{c} \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y + \varepsilon_1}} = \frac{r_s}{c}\, 2\sqrt{y + \varepsilon_1}\,\Bigg|_{y_1}^{y_2} = \frac{r_s}{c}\, 2\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon}\,\Bigg|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} = \frac{r_s}{c}\, 2\left(\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_1}\right) \tag{18}$$

Da $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$, gilt $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \approx \varepsilon_1$ und es folgt:

$$\boxed{t = 2\,\frac{r_s}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\,.} \tag{19}$$

Für das obige Beispiel $x = 1 + 10^{-8}$ ist $\varepsilon_1 = 10^{-8}$ und für t ergibt sich

$$t = 2\,\frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8}\sqrt{10^{-8}}\ \text{s} = 2.0 \cdot 10^{-9}\ \text{s} \tag{20}$$

Relativistisch

$$t = \frac{r_s}{c} \int\limits_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}}} \,. \tag{21}$$

$$x = 1 + \varepsilon \qquad x_1 = 1 + \varepsilon_1 \qquad x_2 = 1 + \varepsilon_2 \tag{22}$$

$$t = \frac{r_s}{c} \int\limits_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon}} \tag{23}$$

$$-\varepsilon = y \qquad d\varepsilon = -dy \tag{24}$$

$$t = \frac{r_s}{c} \int\limits_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{y\sqrt{y + \varepsilon_1}} \tag{25}$$

Die Integraltabelle [4] liefert

$$t = \frac{r_s}{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \ln \frac{\sqrt{y + \varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{y + \varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_1}} \Bigg|_{y_2}^{y_1} \,. \tag{26}$$

$$t = \frac{r_s}{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \ln \frac{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon} + \sqrt{\varepsilon_1}} \Bigg|_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} = \frac{r_s}{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \left[\ln \frac{-\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}} - \ln \frac{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}} \right] \tag{27}$$

$$t = \frac{r_s}{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \ln \frac{-\sqrt{\varepsilon_1}\,(\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1})}{\sqrt{\varepsilon_1}\,(\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1})} = \frac{r_s}{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \ln \frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} \tag{28}$$

Da $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$, können die Wurzeln nach Potenzen von $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ entwickelt werden.

$$t = \frac{r_s}{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}} = \frac{r_s}{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \ln \frac{2 - \frac{1}{2}\,\varepsilon_2/\varepsilon_1}{\frac{1}{2}\,\varepsilon_2/\varepsilon_1} \tag{29}$$

Es ergibt sich schliesslich:

$$\boxed{t = \frac{r_s}{c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \ln 4 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \,.} \tag{30}$$

Für das obige Beispiel mit $\varepsilon_1 = 10^{-8}$, $\varepsilon_2 = 10^{-16}$ wird

$$t = \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} \ln 4 \frac{10^{-8}}{10^{-16}} \;\mathrm{s} = 1.98 \;\mathrm{s}\,. \tag{31}$$

In Turbo Pascal wird der Real-Datentyp „extended“ mit 19 bis 20 Stellen dargestellt. Bei der Integration von x_2 bis x_1 kann daher in $x = 1+\varepsilon$ für ε kein kleinerer Wert als etwa 10^{-18} eingesetzt werden. In der aus der analytischen Integration erhaltenen Beziehung (30) kann dagegen der Wert ε_2 beliebig klein gewählt werden.

Wenn der Absturz von $x_1 = 1 + 10^{-8}$ bis $x_2 = 1 + 5 \cdot 10^{-19}$ (einen Nukleondurchmesser vom Schwarzschildradius entfernt) verfolgt wird, ergibt sich

$$t = \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} \ln 4 \frac{10^{-8}}{5 \cdot 10^{-19}} \;\mathrm{s} = 2.51 \;\mathrm{s}\,. \tag{32}$$

Literaturverzeichnis

[1] Torsten Fliessbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford 1995. Kapitel 24.

[2] Ibid., Kapitel 25.

[3] Ibid., Kapitel 45.

[4] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Frankfurt am Main, Zürich 1964.

16. Mai 2016
A. Ruh