Approximative Rechnung genauer als exakte Rechnung

Gelegentlich liefert eine Approximation ein genaueres Resultat als die exakte Rechnung.

Gesucht sei zum Beispiel der Wert von

$$y = \sqrt{x} - 1 \tag{1}$$

mit

$$x = 1 + \varepsilon \tag{2}$$

für kleine Werte von ε.

Für $\varepsilon \ll 1$ kann die Wurzel nach Potenzen von ε entwickelt werden:

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon - \frac{1}{8}\,\varepsilon^2 + \dots \tag{3}$$

Damit ergibt sich eine Näherung für y :

$$\widetilde{y} = \frac{1}{2}\,\varepsilon - \frac{1}{8}\,\varepsilon^2 \dots \tag{4}$$

Häufig genügt es sogar, wenn nur der erste Term der Reihenentwicklung verwendet wird:

$$\widetilde{y} = \frac{1}{2}\,\varepsilon \dots \tag{5}$$

Ein Taschenrechner, der n Dezimalstellen verarbeiten kann, gibt für $\varepsilon < 2 \cdot 10^{-n}$ den Wert $y = 0$.

Mit einem Taschenrechner, der 9 Dezimalstellen anzeigt, wird für

$$x = 1.000000001 \tag{6}$$

mit der exakten Formel (1) das Resultat $y = 0$ erhalten. Mit der Näherung (5) dagegen ergibt sich

$$\widetilde{y} = 5 \cdot 10^{-10}\,. \tag{7}$$

Und dieses Resultat ist auf 10 Stellen genau!

16. Dezember 2016
A. Ruh