Fall in ein schwarzes Loch

Ein schwarzes Loch habe eine Masse von $M = 3$ Sonnenmassen. Bis auf welche Distanz kann sich ein Raumschiff auf einer radialen Bahn dem Loch nähern, wenn die Fallbeschleunigung nicht grösser als 1 g [1] sein soll? Wenn der Antrieb das Schiff in einem konstanten Abstand r schweben lässt [2], fühlt ein Insasse der Masse m ein Gewicht $F_G = m\,a$, wenn a die Fallbeschleunigung im Abstand r ist. Damit er sich noch wohl fühlt, sollte sich das Schiff nur bis zu dem Abstand r nähern, für den $a = g$ wird.

Der Schwarzschild-Radius des schwarzen Lochs ist gegeben durch:

$$r_s = \frac{2\,G\,M}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{(2.998 \cdot 10^8)^2} = 8.86 \cdot 10^3\,. \tag{1}$$

G ist die Gravitationskonstante. Der Schwarzschild-Radius beträgt somit 8.86 km.

In der Newtonschen Physik gilt für die Fallbeschleunigung a einer Masse m

$$m\,a = G\,\frac{m\,M}{r^2}\,, \tag{2}$$

also

$$r = \sqrt{\frac{G\,M}{a}} \tag{3}$$

und für $a = g$ folgt

$$r = \sqrt{\frac{G\,M}{g}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{9.81}} = 6.371 \cdot 10^9\,. \tag{4}$$

Der minimale Abstand, in dem die Besatzung sich noch wohl fühlt, ist somit $6.371 \cdot 10^6$ km und da $r \gg r_s$, kann die Metrik näherungsweise als euklidisch betrachtet werden.

Wenn in diesem Abstand der Antrieb plötzlich versagt, fällt das Raumschiff unaufhaltsam auf das schwarze Loch zu. Die immer grösser werdende Fallbeschleunigung wird jedoch im freien Fall an Bord des Raumschiffes nicht wahrgenommen, sondern die Insassen fühlen sich schwerelos. Hingegen treten allmählich Gezeitenkräfte auf, die immer mehr zunehmen. Sie werden aber erst in einem Abstand r deutlich wahrnehmbar, in dem die Gezeitenbeschleunigungen

$$\Delta a = \frac{c^2\,r_s}{r^3}\,\Delta s \tag{5}$$

für Punkte, die voneinander $\Delta s = 1$ m entfernt sind, einen bestimmten Minimalwert überschreiten.

Für $\Delta a = 0.01\,g$ wird

$$r = \left[\frac{c^2\,r_s}{\Delta a}\,\Delta s\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{(2.998 \cdot 10^8)^2 \cdot 8.86 \cdot 10^3}{0.01 \cdot 9.81} \cdot 1\right]^{\frac{1}{3}} = 2.01 \cdot 10^7\,. \tag{6}$$

---

[1] $g = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, Erdbeschleunigung

[2] Das ist eine fiktive Situation. Zur Zeit gibt es keinen Raketenantrieb, der in einem Schwerefeld mit einer Gravitationsfeldstärke von 1 g ein „Raumschiff" mit dem mitgeführten Treibstoff länger als ein paar wenige Minuten schweben lassen kann. Das Schiff müsste nicht nur an dieser Stelle im Gravitationsfeld schweben können, sondern es müsste auch zu diesem Punkt hinfliegen, dort bremsen und dann diese Stelle wieder verlassen können. Dazu reichen die zur Zeit verfügbaren Antriebe bei weitem nicht aus. Wenn mit einem Raumschiff die Nähe eines schwarzen Lochs untersucht werden sollte, müsste sich das Schiff auf einer elliptischen Bahn dem Loch nähern. Dabei würde es abgesehen von den Bahnänderungsmanövern antriebsfrei fliegen.

In einem Abstand von 20'100 km werden sich also die Gezeitenkräfte bemerkbar machen und nehmen dann immer mehr zu.

Ab $\Delta a = 1$ g werden die Kräfte unangenehm. Dies geschieht in einem Abstand von 4330 km. Durch die über alle Grenzen wachsenden Gezeitenkräfte werden alle fallenden Körper in radialer Richtung immer stärker gedehnt und in den dazu senkrechten Richtungen komprimiert. Das Phänomen wird als *Spaghettisierung* oder *Spaghettifizierung* bezeichnet. Dieser hässliche Ausdruck wurde 1988 von Stephen Hawking in seinem Buch „A Brief History of Time" geprägt. In populärwissenschaftlichen Darstellungen wird die „Spaghettisierung" drastisch geschildert und der Eindruck vermittelt, dass ein Astronaut an Bord eines in ein schwarzes Loch stürzenden Raumschiffs auf äussert unangenehme Art ums Leben kommt.

Eine Gezeitenbeschleunigung von 100 g für 1 m voneinander entfernte Punkte dürfte tödlich sein, und eine Gezeitenbeschleunigung von 1000 g wirkt bestimmt instantan tödlich. Eine solche wird erreicht in einem Abstand

$$r = \left[\frac{(2.998 \cdot 10^8)^2 \cdot 8.86 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9.81} \cdot 1\right]^{\frac{1}{3}} = 4.33 \cdot 10^5\,. \tag{7}$$

In einem Abstand von 433 km ist also die Gezeitenbeschleunigung sofort tödlich.

Die Fallzeiten τ ergeben sich durch numerische Integration des Integrals

$$\tau = \frac{r_s}{c}\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_1} + \left(\frac{\dot{r_1}}{c}\right)^2}}\,. \tag{8}$$

τ ist die Eigenzeit, d.h. die Zeit, die an Bord des fallenden Raumschiffs gemessen wird. Für die hier betrachteten Fallbereiche unterscheidet sie sich nur minim von der Zeit, die ein weit entfernter, relativ zum schwarzen Loch ruhender Beobachter messen würde. $x = r/r_s$ ist die dimensionslose Radialkoordinate und

$$\dot{r_1} = \left.\frac{dr}{d\tau}\right|_{r=r_1} \tag{9}$$

ist die radiale Geschwindigkeit bei der Radialkoordinate $r = r_1$.

Tabelle 1 gibt die Radialkoordinaten r, bei denen die Gezeitenbeschleunigung da/ds bestimmte Werte erreicht. In der zweiten Kolonne sind die Fallbeschleunigungen in Vielfachen der Erdbeschleunigung g aufgeführt, die am Ort mit der Radialkoordinate r wirken. Die letzte Kolonne gibt die Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$, die an diesem Ort erreicht wird.

In Tabelle 2 sind die Fallzeiten τ zwischen zwei Punkten aufgelistet.

Wenn der Antrieb endgültig versagt und nicht mehr in Gang gesetzt werden kann, fällt das Raumschiff frei, und an Bord werden keine nennenswerte Kräfte wahrgenommen. Nach 7 Stunden, 51 Minuten und 20 Sekunden treten kleine Gezeitenkräfte auf, die Massenpunkte, die in 1 m Abstand voneinander schweben, mit 0.01 g relativ zueinander beschleunigen würden. 1.46 Sekunden später sind diese Beschleunigungen auf 0.1 g angewachsen und nach weiteren 0.46 Sekunden erreichen sie 1 g und machen sich also unangenehm bemerkbar. 0.146 Sekunden später steigen die Gezeitenbeschleunigungen auf 10 g, womit sie schmerzhaft werden, und 0.06 Sekunden danach erreichen sie 1000 g und wirken absolut tödlich. In etwas mehr als 2 Sekunden, nachdem die Raumschiffbe-

Ort	a g	da/ds g/m	r km	$x = r/r_s$	$\dot{r}$ m/s
0	1	$3.14 \cdot 10^{-10}$	$6.371 \cdot 10^{6}$	$7.190 \cdot 10^{5}$	0
1	$1.00 \cdot 10^{5}$	0.01	$2.010 \cdot 10^{4}$	2268	$6.285 \cdot 10^{6}$
2	$4.66 \cdot 10^{5}$	0.1	$9.329 \cdot 10^{3}$	1053	$9.232 \cdot 10^{6}$
3	$2.17 \cdot 10^{6}$	1	$4.330 \cdot 10^{3}$	488.7	$1.356 \cdot 10^{7}$
4	$1.00 \cdot 10^{7}$	10	$2.010 \cdot 10^{3}$	226.8	$1.990 \cdot 10^{7}$
5	$4.66 \cdot 10^{7}$	100	932.9	105.3	$2.921 \cdot 10^{7}$
6	$2.17 \cdot 10^{8}$	1000	433.0	48.87	$4.288 \cdot 10^{7}$

Tabelle 1: Fallbeschleunigung, Gezeitenbeschleunigung, radialer Abstand und Radialgeschwindigkeit

Weg	Fallzeit τ s
$0 \to 1$	$2.828 \cdot 10^{4}$
$1 \to 2$	1.46
$2 \to 3$	0.46
$3 \to 4$	0.146
$4 \to 6$	0.061

Tabelle 2: Fallzeiten

satzung zum ersten Mal Kräfte wahrgenommen hat, ist sie bereits tot. Falls sie überhaupt noch Schmerzen wahrnimmt, dauern diese nicht mehr als 0.06 Sekunden.

24. November 2016

10. Dezember 2016

A. Ruh