Wasserrad

Leistung

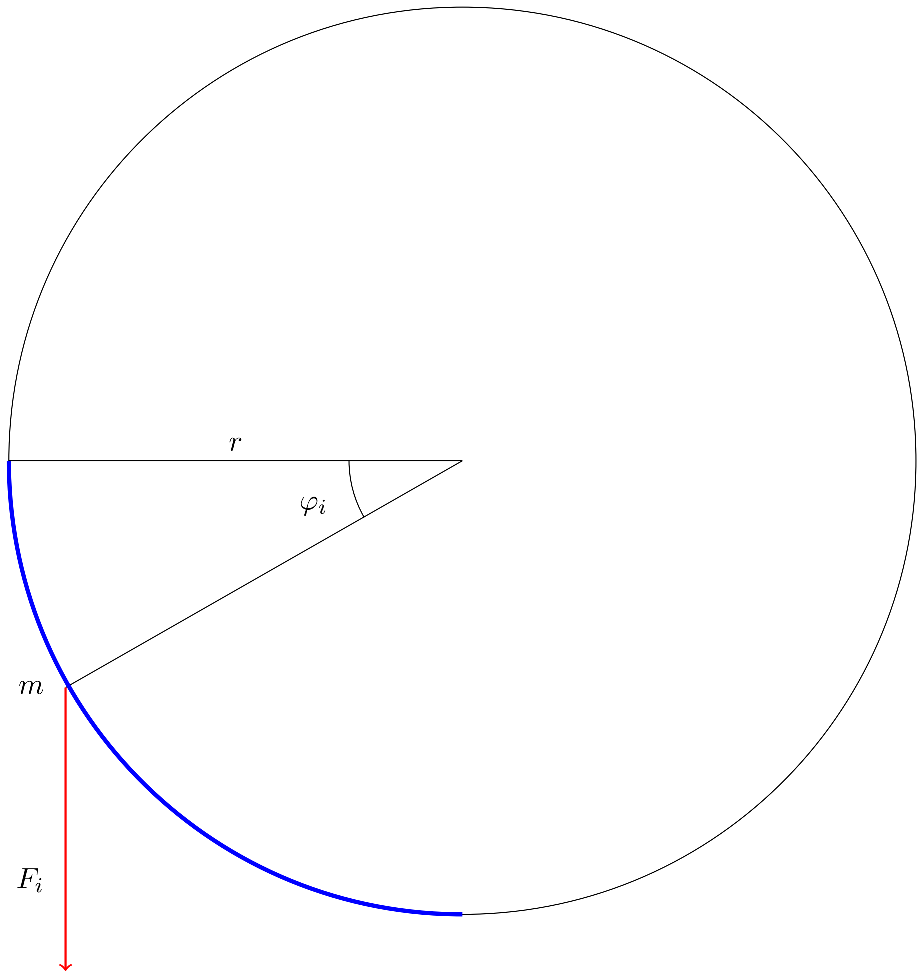

Abbildung 1: Mittelschlächtiges Wasserrad
Blau: gefüllte Zellen

Leistung eines mittelschlächtigen Wasserrades:

$$P = M\,\omega = \sum_{i=1}^{n_v} F_i\, r\, \cos\varphi_i\, \omega \tag{1}$$

n_v ist die Zahl der gefüllten Zellen, und n ist die totale Zahl der Zellen. Es gilt:

$$n_v = \frac{1}{4}\, n\,. \tag{2}$$

Dass die untersten Zellen vor dem tiefsten Punkt sich teilweise entleeren, kann vernachlässigt werden, da deren Beitrag zum Drehmoment für $\varphi \to 90°$ gegen null geht.

$$\sum_{i=1}^{n_v} F_i\, r\, \cos\varphi_i = n_v\, m\, g\, \langle\cos\varphi_i\rangle \tag{3}$$

m ist die Wassermasse einer gefüllten Zelle. Diese ist gegeben durch $m = \varrho V$, wobei V das Volumen einer Zelle ist.

Die Winkelgeschwindigkeit ω des Wasserrades ergibt sich aus der Umdrehungszeit T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{4}$$

Der mittlere Wert von $\cos\varphi_i$ kann näherungsweise durch Integration bestimmt werden:

$$\langle\cos\varphi_i\rangle \approx \frac{1}{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2}{\pi}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \tag{5}$$

Damit wird

$$P = \frac{2}{\pi}\,n_v\,\varrho\,V\,g\,r\,\frac{2\pi}{T}\,. \tag{6}$$

Wird noch die Beziehung (2) eingesetzt, ergibt sich schliesslich

$$\boxed{P = n\,\varrho\,V\,g\,r\,\frac{1}{T}\,.} \tag{7}$$

Andere Betrachtungsweise:

$$P = \dot{m}\,g\,h\,. \tag{8}$$

Mit $h = r$ und

$$\dot{m} = \frac{n\,\varrho\,V}{T} \tag{9}$$

wird daraus

$$P = n\,\varrho\,V\,g\,r\,\frac{1}{T}\,, \tag{10}$$

was mit der Gleichung (7) übereinstimmt.

Beispiel

Wasserrad im Restaurant Mühle der Kartause Ittingen [1]

Durchmesser:	8.7	m
Masse:	3700	kg
Lagerradius:	ca. 10	cm
Zahl der Zellen:	65	
Volumen der Zellen:	ca. 25	Liter
Umdrehungszeit:	70	s

Abstand der Zellenmitte von der Drehachse: $r \approx 4.3$ m

Es wird die maximal mögliche Leistung berechnet unter der Annahme, dass die Zellen vollständig gefüllt werden (was in der Kartause Ittingen nicht der Fall ist).

$$P = 65\cdot 10^3\cdot 0.025\cdot 9.81\cdot 4.3\cdot\frac{1}{70} = 979 \tag{11}$$

$$\boxed{P = 980\text{ W}} \tag{12}$$

Reibung

Leistung der Lagerreibung:

$$P_r = \mu\, m\, g\, r_L\, \omega \tag{13}$$

Gleitlager: $\mu \approx 0.05$ [2]

Wasserrad Ittingen:

$$P_r = 0.05 \cdot 3700 \cdot 9.81 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2\,\pi}{70} = 8.15 \tag{14}$$

$$\boxed{P_r = 8.15 \text{ W}} \tag{15}$$

$$P_r = \dot{m}\, g\, h \qquad\qquad \dot{m} = \frac{P_r}{g\, h} \tag{16}$$

$$\dot{m} = \frac{8.15}{9.81\, 4.3} = 0.19 \tag{17}$$

$$\dot{m} = 0.2 \text{ kg/s} \tag{18}$$

Der Wasserstrahl, der auf die Zellen des Wasserrades in Ittingen gelenkt wird, hat die Breite b, die Dicke d und die Geschwindigkeit v.

$$\dot{V} = b\, d\, v \tag{19}$$

$$b \approx 0.4 \text{ m} \qquad d \approx 5 \text{ mm} \qquad v \approx 0.1 \text{ m/s} \tag{20}$$

$$\dot{V} = 0.4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.1 = 2 \cdot 10^{-4} \tag{21}$$

$$\dot{V} = 0.2 \text{ Liter/s} \mathrel{\widehat{=}} \dot{m} = 0.2 \text{ kg/s} \ \surd \tag{22}$$

Literatur

[1] Wasserrad der Kartause Ittingen. Wasserrad Ittingen

[2] A. Ettemeyer, O. Olbrich, *Konstruktionselemente, Kapitel 10: Gleitlager*, Fachhochschule München, München 2007. Gleitlager

8. September 2015
A. Ruh