# Hörschwelle

Für die Schwelle der Hörbarkeit eines Sinustons von 1000 Hz wurde ein Schalldruck von $2 \cdot 10^{-5}$ Pascal (20 $\mu$Pa) als Referenzwert für den absoluten Schalldruckpegel festgelegt (ein mittlerer Wert aus Messungen an vielen Individuen). Später stellte sich heraus, dass dieser Wert für 1000 Hz etwas zu niedrig angesetzt war und ungefähr für 2000 Hz zutrifft. Dennoch wurde am ursprünglichen Wert festgehalten. [1]

Für einen Sinuston gilt:

$$p = \hat{p}\, \sin \omega t\,. \tag{1}$$

$\hat{p}$ ist die Schalldruckamplitude. Mit „Schalldruck" ist hier der Effektivwert $\tilde{p}$ gemeint:

$$\tilde{p} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}\,. \tag{2}$$

Die Hörschwelle ist somit definiert als

$$\tilde{p} = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Pa}\,. \tag{3}$$

Wenn das menschliche Ohr nur zehnmal empfindlicher wäre, würde es das thermische Rauschen der Moleküle hören.

Die Zahl der Moleküle, die im Zeitintervall $dt$ auf die Fläche $A$ prallen, ist:

$$z = n\, A\, dt\, \bar{v}_x = n\, A\, dt \int_0^\infty v_x\, f(v_x)\, dv_x\,. \tag{4}$$

$n$ ist die Anzahl Moleküle pro Volumeneinheit. Diese ergibt sich aus der Gasgleichung

$$p\, V = \frac{N}{N_A}\, R\, T = N\, k\, T \tag{5}$$

als

$$n = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT}\,. \tag{6}$$

$f(v_x)$ ist die Geschwindigkeitsverteilung der $x-$Komponente der Geschwindigkeiten der Gasmoleküle. Diese ist gegeben durch die Beziehung [2]

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\, \pi\, k\, T}}\, \exp\left(-\frac{m\, v_x^2}{2\, k\, T}\right)\,. \tag{7}$$

Das Integral in Gleichung (4) lässt sich geschlossen lösen:

$$\int_0^\infty x\, e^{-ax^2}\, dx = -\frac{e^{-ax^2}}{2\, a}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{2\, a}\,. \tag{8}$$

Für $\bar{v}_x$ ergibt sich damit

$$\bar{v}_x = \int_0^\infty v_x\, f(v_x)\, dv_x = \sqrt{\frac{k\, T}{2\, \pi\, m}}\,. \tag{9}$$

Damit wird

$$z = n\,A\,dt\,\sqrt{\frac{k\,T}{2\,\pi\,m}}\,. \tag{10}$$

Die Zahl der Stösse gehorcht einer Poisson-Verteilung, und die Standardabweichung ist

$$\Delta z = \sqrt{z}\,, \tag{11}$$

also

$$\Delta z = \sqrt{\frac{p}{k\,T}\,A\,dt\,\sqrt{\frac{k\,T}{2\,\pi\,m}}} \tag{12}$$

oder mit den Beziehungen $M = N_A\,m$ und $R = N_A\,k$ :

$$\Delta z = \sqrt{\frac{p}{k\,T}\,A\,dt\,\sqrt{\frac{R\,T}{2\,\pi\,M}}}\,. \tag{13}$$

Die Fläche des menschlichen Trommelfells ist 85 mm$^2$. Für einen Sinuston von 2000 Hz ist die Dauer $dt$ einer Halbwelle gleich $10^{-3}$ s. Die mittlere Molmasse der Luft bei 20 °C und 50 % Luftfeuchtigkeit ist 28.9 g. Damit ergibt sich für einen Druck von $10^5$ Pa und eine Temperatur von 20 °C:

$$\Delta z = \sqrt{\frac{10^5}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293} \cdot 85 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{8.314 \cdot 293}{2 \cdot \pi \cdot 28.9 \cdot 10^{-3}}}} = 1.56 \cdot 10^{10}\,. \tag{14}$$

Diese Schwankung der Stosszahl bewirkt eine Druckschwankung entsprechend den Beziehungen

$$\Delta p = \frac{F}{A} \tag{15}$$

$$F = \frac{dI}{dt} \tag{16}$$

$$dI = \Delta z\,2\,m\,\bar{v}_x\,. \tag{17}$$

Somit ist

$$\Delta p = \frac{2\,\Delta z}{A\,dt}\,\sqrt{\frac{m\,k\,T}{2\,\pi}}\,. \tag{18}$$

Es ergibt sich

$$\Delta p = \frac{2 \cdot 1.56 \cdot 10^{10}}{85 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}} \cdot \sqrt{\frac{28.9 \cdot 10^{-3} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{2\pi \cdot 6.02 \cdot 10^{23}}} = 2.04 \cdot 10^{-6}\,, \tag{19}$$

also

$$\Delta p = 2.04 \cdot 10^{-6}\ \text{Pa}\,. \tag{20}$$

Der Schalldruck bei der menschlichen Hörschwelle ist also nur 10-mal grösser als die durch die Molekülstösse verursachten Druckschwankungen am Trommelfell.

## Literatur

[1] Wikipedia: Hörschwelle
https://de.wikipedia.org/wiki/Hörschwelle

[2] Walter Greiner, Ludwig Neise, Horst Stöcker: *Thermodynamik und statistische Mechanik*
Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1993.

10. April 2019
A. Ruh