Newton und die Relativität

Konventioneller Zugang zur speziellen Relativitätstheorie

Bei der üblichen Herleitung der speziellen Relativitätstheorie wird vom Resultat des Michelson-Morley-Experiments ausgegangen und es werden die folgenden Postulate aufgestellt:

1. Alle Inertialsysteme sind gleichwertig.
2. Die Lichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert.

Dies kann auch so ausgedrückt werden:
In allen Inertialsystemen hat die Lichtgeschwindigkeit den gleichen Wert und die Gleichungen der Physik haben die gleiche Form.

Aus diesen Postulaten ergibt sich die Lorentz-Transformation und daraus folgt das Additionstheorem der Geschwindigkeiten, die Zeitdilatation und die Längenkontraktion.

Die physikalischen Gleichungen werden mit Vierervektoren und Lorentz-Tensoren geschrieben. [1, 2, 3]

Das Postulat 2 kann auch durch die zwei folgenden Annahmen ersetzt werden [3]:

2a. Der Raum ist isotrop, d.h. alle räumlichen Richtungen sind äquivalent.
2b. Raum und Zeit sind homogen, d.h. kein Ort und kein Zeitpunkt ist vor anderen ausgezeichnet.

Newton und die Relativität

In seinem Buch „Newton und die Relativität“ zeigt Francesco Cester [4] einen alternativen und möglicherweise für Anfänger leichter verständlichen Zugang zur relativistischen Mechanik. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird nicht postuliert und die Lorentz-Transformation wird für die Herleitung der relativistischen Gleichungen nicht verwendet.

Newton hat sein zweites Gesetz, in modernen Begriffen ausgedrückt, in der richtigen Formulierung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1}$$

beschrieben. $\vec{p}$ ist der Impuls $\vec{p} = m\,\vec{v}$. Dabei wurde es jedoch als selbstverständlich betrachtet, dass die Masse m konstant ist. In der klassischen Mechanik wird daher das zweite Newtonsche Gesetz üblicherweise in der Form

$$\vec{F} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2}$$

geschrieben.

Cester schreibt nun das zweite Newtonsche Gesetz in seiner ursprünglichen Form und lässt zu, dass m variabel ist. Damit ergibt sich im zweiten Newtonschen Gesetz neben dem in der klassischen Mechanik üblichen Term ein zweiter Term:

$$\vec{F} = \frac{d(m\,\vec{v})}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\,\vec{v}\,. \tag{3}$$

Für die Herleitung von Einsteins Gleichung

$$E = m\,c^2 \tag{4}$$

zitiert Cester das Buch von Max Born „Die Relativitätstheorie Einsteins“ [5]. Born gibt einen einfachen Beweis, „der von Einstein selbst stammt und keinen Gebrauch vom mathematischen Formalismus der Relativitätstheorie macht“. Dieser Beweis verwendet die Tatsache, dass eine Lichtwelle der Energie E einen Impuls $p = E/c$ hat. Dies wird in der Elektrodynamik mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen und des Poynting-Vektors gezeigt[1]. Born denkt sich ein langes Rohr, an dessen Enden zwei gleiche Körper angebracht sind.

Cester verzichtet auf das Rohr und betrachtet statt dessen zwei Körper gleicher Masse, die sich in einem Abstand ℓ voneinander befinden und in einem Inertialsystem ruhen, auf das keine äusseren Kräfte wirken. Der Körper 1 emittiert einen kurzen intensiven Lichtstrahl in Richtung des Körpers 2. Dadurch erhält der Körper 1 einen Rückstoss und bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in entgegengesetzter Richtung zum Lichtstrahl. Nach der Zeit $t = \ell/v$ wird der Lichtstrahl vom Körper 2 absorbiert, und der Körper 1 hat sich um die Strecke vt vom Körper 2 entfernt. Dadurch hätte sich der Massenmittelpunkt des Systems verschoben Das ist aber nicht möglich, da nach Voraussetzung keine äusseren Kräfte auf das System wirken. Also müssen sich die Massen der Körper durch die Emission und Absorption des Lichtstrahls geändert haben: $m_1 = m - \Delta m$ und $m_2 = m + \Delta m$. Die Bedingung, dass der Ort des Massenmittelpunkts unverändert bleibt, liefert dann die Beziehung

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}\,. \tag{5}$$

Im Gegensatz zum Rohr, das nach der Absorption des Lichtstrahls am anderen Ende wieder zum Stillstand kommt, bewegen sich die beiden Körper nach der Absorption des Lichtstrahls zwar immer weiter auseinander, aber da beide Körper den gleichen Impuls haben, verschiebt sich der Massenmittelpunkt dadurch nicht.

Eine weitere nicht-relativistische Herleitung der Masse-Energie-Beziehung verwendet den Doppler-Effekt. Es wird ein Körper der Masse m_1 betrachtet, der sich mit einer Geschwindigkeit $v_1 \ll c$ relativ zu einem Beobachter bewegt und zwei Photonen gleicher Frequenz f in entgegengesetzter Richtung emittiert. Aus dem Impulserhaltungssatz folgt

$$m_1\,v_1 = m_2\,v_2 + \frac{hf}{c}\,(1 + \frac{v_1}{c}) - \frac{hf}{c}\,(1 - \frac{v_1}{c})\,. \tag{6}$$

Da die Impulse der emittierten Photonen entgegengesetzt gleich gross sind, ändert sich die Geschwindigkeit des Körpers nicht, und es gilt $v_1 = v_2$. Damit ergibt sich mit $E = 2hf$ schliesslich

$$\Delta m = \frac{E}{c^2}\,. \tag{7}$$

Beide Herleitungen zeigen, dass bei der Emission elektromagnetischer Wellen ein Teil der Masse eines Körpers in Energie umgewandelt werden kann. Es wird damit aber nicht bewiesen, dass sich die ganze Masse eines Körpers in Energie umwandeln lässt.

Bei einer Annihilation wird die gesamte anfänglich vorhandene Masse in Strahlungsenergie umgewandelt. Es wird der Prozess

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \to 2\,\gamma$$

[1] Der Impuls eines Photons kann aber auch direkt hergeleitet werden [6].

betrachtet. Durch Anwendung des Impulserhaltungssatzes wird dann die Beziehung

$$E = m\,c^2 \tag{8}$$

erhalten, wobei $m = m_{\mathrm{e}^+} + m_{\mathrm{e}^-}$ bedeutet.

Eine Verschiebung $\vec{ds}$ parallel zur Kraft $\vec{F}$ vergrössert die kinetische Energie E_k:

$$dE_k = F\,ds = \frac{dp}{dt}\,ds = \frac{dp}{dt}\,v\,dt = dp\,v = d(mv)\,v = v^2\,dm + m\,v\,dv\,. \tag{9}$$

Andererseits folgt aus (8)

$$dE_k = c^2\,dm\,, \tag{10}$$

und dies eingesetzt in (9) liefert eine Differentialgleichung, deren Integration die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse ergibt:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{11}$$

Einsetzen von (11) und (10) in (9) gibt eine neue Differentialgleichung, deren Integration die Beziehung für die kinetische Energie

$$E_k = \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0\,c^2 \tag{12}$$

ergibt.

Die Gleichungen für die Masse und die Energie, (11) und (12), zeigen, dass für massebehaftete Körper die Lichtgeschwindigkeit nicht erreicht, geschweige denn überschritten werden kann.

Der Reziprokwert des Lorentzfaktors

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{13}$$

kann durch ein rechtwinkliges Dreieck dargestellt werden.

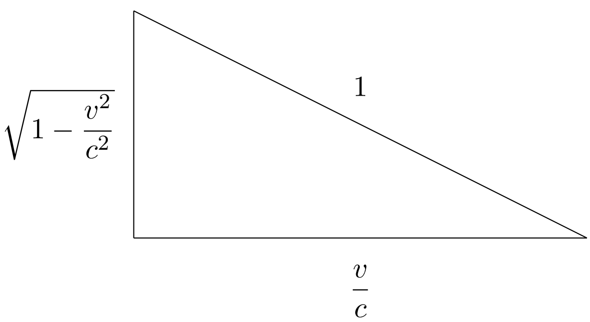

Abbildung 1: Relativistisches Dreieck

Wenn die Seiten mit $m\,c^2$ multipliziert werden, ergibt sich das E-p-m-Dreieck

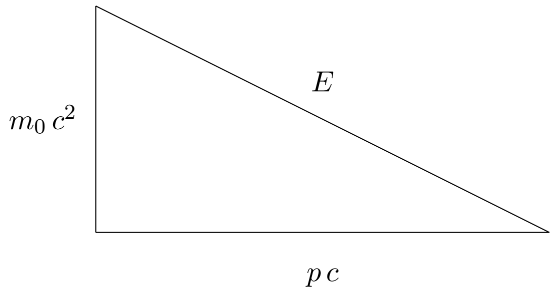

Abbildung 2: E-p-m-Dreieck

und damit die bekannte Beziehung

$$E^2 = p^2\,c^2 + m_0^2\,c^4\,. \tag{14}$$

Aus dem Impulserhaltungssatz folgt für einen inelastischen Stoss das Geschwindigkeits-Additionstheorem:

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1\,v_2}{c^2}}\,. \tag{15}$$

Daraus ergibt sich, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den gleichen Wert hat. Eine Lichtwelle, die sich im System S_1 mit der Geschwindigkeit $v_1 = c$ bewegt, hat im System S_2, das sich relativ zu S_1 mit der Geschwindigkeit v_2 bewegt, die Geschwindigkeit

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1\,v_2}{c^2}} = \frac{c + v_2}{1 + \dfrac{c\,v_2}{c^2}} = c\,. \tag{16}$$

Der Energieerhaltungssatz beim inelastischen Zusammenstoss zwei gleicher Massen liefert die Beziehung für die Längenkontraktion und daraus ergeben sich schliesslich die Gleichungen der Lorentz-Transformation:

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad\qquad t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}\,x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{17}$$

Es werden Anwendungsbeispiele der Lorentz-Transformation diskutiert.

Die klassische Gleichung für den Doppler-Effekt ist nicht korrekt für Geschwindigkeiten, die nicht klein sind verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit. Die relativistisch korrekte Beziehung wird aus den Erhaltungssätzen von Energie und Impuls für die Elektron-Positron-Annihilation erhalten.

Für den Fall, dass die Kraft $\vec{F}$ parallel ist zur Geschwindigkeit $\vec{v}$, gilt $\vec{F} \cdot \vec{ds} = F\,v\,dt = dE_k$ und mit (10) wird daraus

$$dm = \frac{F\,v\,dt}{c^2}\,. \tag{18}$$

Dies eingesetzt in (3), gibt nach kurzer Umformung die für diesen Fall geltende Beziehung für die Beschleunigung:

$$a = \frac{F}{m_0}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\,. \tag{19}$$

Fazit

Der von Cester beschriebene Zugang zur speziellen Relativitätstheorie dürfte für Leser, die sich zum ersten Mal mit diesem Thema befassen, leichter verständlich sein als der übliche Weg. Für Physiker und für Leser, die die spezielle Relativitätstheorie schon kennen, ist es faszinierend zu sehen, dass die relativistischen Gleichungen auch konsequent aus dem Newtonschen Gesetz (in der ursprünglichen Formulierung) hergeleitet werden können, indem lediglich die Beziehung für den Impuls elektromagnetischer Wellen hinzugenommen wird.

Literatur

[1] Torsten Fließbach, *Mechanik. Lehrbuch zur theoretischen Physik I*, Spektrum Akademischer Verlag , München 2007.

[2] Walter Greiner, *Klassische Mechanik I. Kinematik und Dynamik der Punktteilchen. Relativität*, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main 2003.

[3] Ulrich E. Schröder, *Spezielle Relativitätstheorie*, Verlag Harry Deutsch,Thun; Frankfurt am Main 1987.

[4] Francesco Cester, *Newton und die Relativität. Ein alternativer Zugang zur relativistischen Mechanik mittels der Lex Secunda*, Books on Demand, Norderstedt 2019.

[5] Max Born, *Die Relativitätstheorie Einsteins*, 5. Auflage, Springer-Verlag, Seite 244.

[6] https://qudev.phys.ethz.ch/static/content/science/BuchPhysikIV/PhysikIVch4.html

4. Dezember 2019
A. Ruh