Drehimpulserhaltungssatz

Tages-Anzeiger, 7. Juli 2003

Bagatelle oder Katastrophe?

Eis in der Arktis schrumpft, TA vom 1. 7.

Es wird immer wieder darauf hingewiesen, dass die polaren Eisflächen infolge der Klimaerwärmung laufend abschmelzen und die riesigen Mengen von Schmelzwasser sich auf der ganzen Erdoberfläche verteilen, was dann verschiedene weitere Effekte auslöst. Eine bestimmte Folgeerscheinung wird meistens nicht beachtet: Die vom Polargebiet kommenden Wassermassen haben eine grössere Entfernung von der Erdachse als zuvor und damit auch ein grösseres Trägheitsmoment. Der Drehimpuls bleibt im geschlossenen System konstant, und so muss die Drehgeschwindigkeit abnehmen, Tage und Nächte werden damit länger. Die Tage erfahren während der längeren Zeit eine höhere Erwärmung, und in den Nächten kommt es zu einer stärkeren Abkühlung. Die grössere Schwankungsbreite der Temperatur im Tagesablauf verursacht wiederum extremeres Wettergeschehen, und auch viele Lebewesen werden sich den grösseren Temperaturschwankungen anpassen müssen. Ob im Ganzen eine Bagatelle oder Katastrophe auf uns zukommt, wird sich zeigen.

LASZLO JABLONKAY, ZÜRICH

Wieviel macht dieser Effekt nun tatsächlich aus?

Eine erste Abschätzung der Grösse des Effekts ergibt sich sofort aus einem maßstäblichen Modell. Wenn die Erde durch einen Globus von 30 cm Durchmesser dargestellt wird, ist die antarktische Eisschicht eine Schicht von etwa 10 cm Durchmesser und 7 Hunderstelmillimeter Dicke. Nachdem diese Eisschicht geschmolzen ist und sich als Wasser auf alle Ozeane verteilt hat, hat die Dicke der Wasserschicht um 1,4 Tausendstelmillimeter zugenommen. Dass eine solche Massenverlagerung bei einer massiven Kugel von 30 cm Durchmesser keine nennenswerte Auswirkung haben kann, ist offensichtlich.

Dies wird auch durch eine quantitative Durchrechnung des Drehimpulssatzes bestätigt.

Für die Rotation eines Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Hauptträgheitsachse mit dem Massenträgheitsmoment J ist der Drehimpuls L gegeben durch:

$$L = J\,\omega\,. \tag{1}$$

Falls kein äusseres Drehmoment bezüglich dieser Achse wirkt, bleibt der Drehimpuls konstant:

$$L = J\,\omega = J_0\,\omega_0 = \text{const.}\,. \tag{2}$$

Somit ist

$$\frac{1}{\omega} = \frac{J}{J_0}\,\frac{1}{\omega_0}\,, \tag{3}$$

und für die Periode (Dauer einer Umdrehung)

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} \tag{4}$$

ergibt sich:

$$T = \frac{J}{J_0}\,T_0\,. \tag{5}$$

Eine Änderung ΔJ des Trägheitsmomentes bewirkt die Änderung

$$\Delta T = \frac{\Delta J}{J_0}\,T_0 \tag{6}$$

der Periode.

Die Änderung des Trägheitsmomentes wird sicher überschätzt, wenn angenommen wird, dass anfänglich die ganze Eismasse m am Südpol, d.h. auf der Erdachse, konzentriert ist und dass am Schluss das ganze geschmolzene Eis sich als Wasser auf dem Äquator befindet.

Mit diesen Annahmen ist

$$J_0 = J_E \tag{7}$$

und

$$J = J_E + m\,r^2\,. \tag{8}$$

Wenn für das Trägheitsmoment der Erde J_E das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel mit Radius r und Masse m_E eingesetzt wird, ist

$$J_E == \frac{2}{5}\,m_E\,r^2 = 0{,}4\,m_E\,r^2\,. \tag{9}$$

Wird berücksichtigt, dass die Dichte des Erdmaterials zwischen 2600 kgm^{-3} an der Oberfläche und 17'200 kgm^{-3} im Erdzentrum variiert, ergibt sich als genauerer Wert[1]

$$J_E = 0,33\, m_E\, r^2\,. \tag{10}$$

Die Differenz der Trägheitsmomente wird

$$\Delta J = J - J_0 = m\, r^2 \tag{11}$$

und für ΔT folgt:

$$\boxed{\Delta T = \frac{1}{0,33}\,\frac{m}{m_E}\,T_0\,.} \tag{12}$$

Die Eismasse kann aus der Tatsache bestimmt werden, dass der Meeresspiegel um 60 Meter ansteigen würde, wenn alles Antarktiseis schmelzen würde. Die Meere bedecken 70 Prozent der Erdoberfläche. Die Eismasse ist daher gegeben durch

$$m = \varrho \cdot 0,7 \cdot 4\,\pi\, r^2\, h\,, \tag{13}$$

also mit $r = 6378$ km$6,378 \cdot 10^6$ m wird

$$m = 10^3 \cdot 0,7 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (6,378 \cdot 10^6)^2 \cdot 60 = 2,15 \cdot 10^{19} \qquad m = 2,15 \cdot 10^{19}\ \text{kg}\,. \tag{14}$$

Mit der Erdmasse $m_E = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg und $T_0 = 24 \cdot 3600\ \text{s} = 8,64 \cdot 10^4$ s ergibt sich schliesslich

$$\Delta T = \frac{1}{0,33} \cdot \frac{2,15 \cdot 10^{19}}{5,97 \cdot 10^{24}} \cdot 8,64 \cdot 10^4 = 0,943\,. \qquad \boxed{\Delta T = 0,94\ \text{s}} \tag{15}$$

Eine Verlängerung des Tages um weniger als 1 Sekunde hat aber bestimmt keinerlei merkliche Auswirkungen auf das Klima.

[1] Siehe z.B.: J.M.A. Danby, „Fundamentals of Clestial Mechanics“ oder www.planetenkunde.de.

4. Dezember 2003

A. Ruh