Wasserrad

Leistung

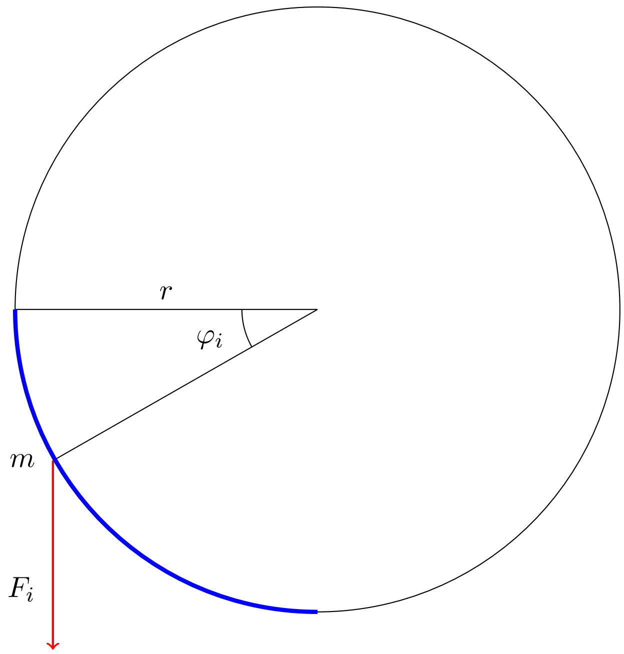


Abbildung 1: Mittelschlächtiges Wasserrad
Blau: gefüllte Zellen

Leistung eines mittelschlächtigen Wasserrades:

$$P = M\,\omega = \sum_{i=1}^{n_v} F_i\, r\, \cos\varphi_i\, \omega \tag{1}$$

n_v ist die Zahl der gefüllten Zellen, und n ist die totale Zahl der Zellen. Es gilt:

$$n_v = \frac{1}{4}\, n\,. \tag{2}$$

Dass die untersten Zellen vor dem tiefsten Punkt sich teilweise entleeren, kann vernachlässigt werden, da deren Beitrag zum Drehmoment für $\varphi \to 90°$ gegen null geht.

$$\sum_{i=1}^{n_v} F_i\, r\, \cos\varphi_i\, \omega = n_v\, m\, g\, r\, \langle\cos\varphi_i\rangle\, \omega \tag{3}$$

m ist die Wassermasse einer gefüllten Zelle. Diese ist gegeben durch $m = \varrho\, V$, wobei V das Volumen einer Zelle ist.

Die Winkelgeschwindigkeit ω des Wasserrades ergibt sich aus der Umdrehungszeit T:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T}\,. \tag{4}$$

Der mittlere Wert von $\cos\varphi_i$ kann näherungsweise durch Integration bestimmt werden:

$$\langle\cos\varphi_i\rangle \approx \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi = \frac{2}{\pi}\sin\varphi\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \tag{5}$$

Damit wird

$$P = \frac{2}{\pi}\, n_v\, \varrho\, V\, g\, r\, \frac{2\,\pi}{T}\,. \tag{6}$$

Wird noch die Beziehung (2) eingesetzt, ergibt sich schliesslich

$$\boxed{P = n\, \varrho\, V\, g\, r\, \frac{1}{T}\,.} \tag{7}$$

Andere Betrachtungsweise:

$$P = \dot{m}\, g\, h\,. \tag{8}$$

Mit $h = r$ und

$$\dot{m} = \frac{n\, \varrho\, V}{T} \tag{9}$$

wird daraus

$$P = n\, \varrho\, V\, g\, r\, \frac{1}{T}\,, \tag{10}$$

was mit der Gleichung (7) übereinstimmt.

Beispiel

Wasserrad im Restaurant Mühle der Kartause Ittingen [1]

Durchmesser:	8.7	m
Masse:	3700	kg
Lagerradius:	ca. 10	cm
Zahl der Zellen:	65	
Volumen der Zellen:	ca. 25	Liter
Umdrehungszeit:	70	s

Abstand der Zellenmitte von der Drehachse: $r \approx 4.3$ m

Es wird die maximal mögliche Leistung berechnet unter der Annahme, dass die Zellen vollständig gefüllt werden (was in der Kartause Ittingen nicht der Fall ist).

$$P = 65 \cdot 10^3 \cdot 0.025 \cdot 9.81 \cdot 4.3 \cdot \frac{1}{70} = 979 \tag{11}$$

$$\boxed{P = 980 \text{ W}} \tag{12}$$

Reibung

Leistung der Lagerreibung:

$$P_r = \mu\, m\, g\, r_L\, \omega \tag{13}$$

Gleitlager: $\mu \approx 0.01$ [2]

29.12.2024, aus Simulationsprogramm „wassrad.pas“ [3]: $\mu = 0.0157$ $\dot{m} = 0.2$ kg/s

Wasserrad Ittingen:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{70} = 0.09 \tag{14}$$

$$P_r = 0.0157 \cdot 3700 \cdot 9.81 \cdot 0.1 \cdot \frac{2\,\pi}{70} = 5.12 \tag{15}$$

$$\boxed{P_r = 5.12 \text{ W}} \tag{16}$$

$$P_r = k\,\dot{m}\,g\,h \qquad\qquad \dot{m} = \frac{P_r}{k\,g\,h} \tag{17}$$

Mit dem Korrekturfaktor k wird berücksichtigt, dass die Wassermasse in den Kammern nicht die ganze Höhe h durchläuft, da sich die Kammern auf ihrem Weg nach unten immer mehr entleeren. Für k wird der Wert 0.6 angenommen.

$$\dot{m} = \frac{5.12}{0.6 \cdot 9.81 \cdot 4.3} = 0.20 \tag{18}$$

$$\dot{m} = 0.20 \text{ kg/s} \tag{19}$$

Der Wasserstrahl, der auf die Zellen des Wasserrades in Ittingen gelenkt wird, hat die Breite b, die Dicke d und die Geschwindigkeit v.

$$\dot{V} = b\,d\,v \tag{20}$$

$$b \approx 0.5 \text{ m} \qquad d \approx 5 \text{ mm} \qquad v \approx 0.1 \text{ m/s} \tag{21}$$

$$\dot{V} = 0.4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.1 = 2 \cdot 10^{-4} \tag{22}$$

$$\dot{V} = 0.2 \text{ Liter/s} \tag{23}$$

$$\dot{m} = 0.2 \text{ kg/s}\,. \tag{24}$$

Literatur

[1] Wasserrad der Kartause Ittingen. Wasserrad Ittingen

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Reibungskoeffizient

[3] Pascal-Programm „wassrad.pas“, A. Ruh, 29.12.2024

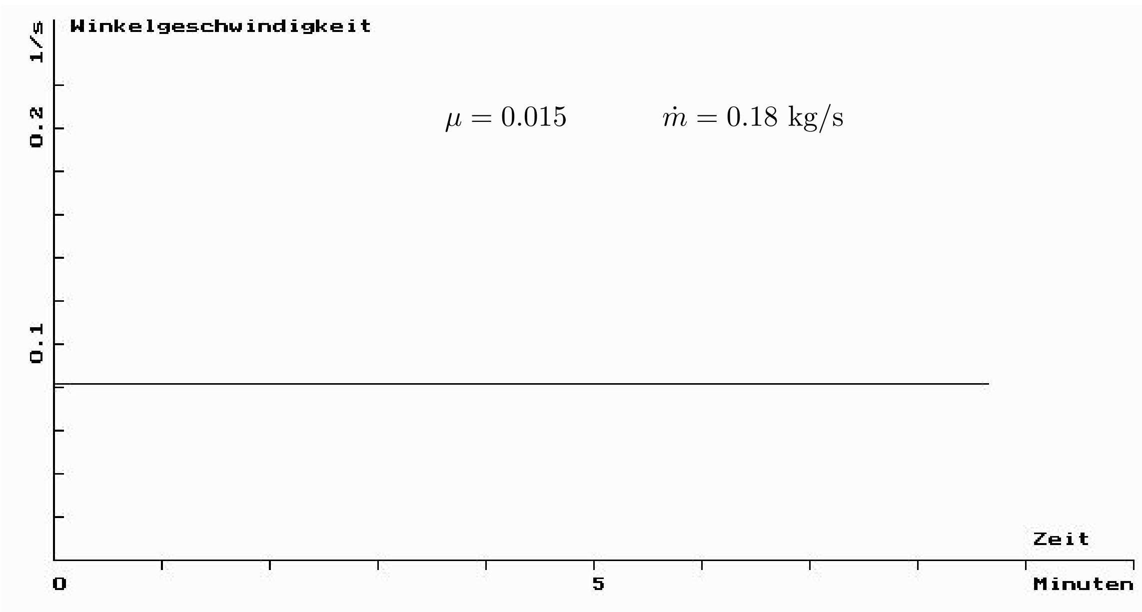
8. September 2015
Korrekturen: 29. Dezember 2024
A. Ruh

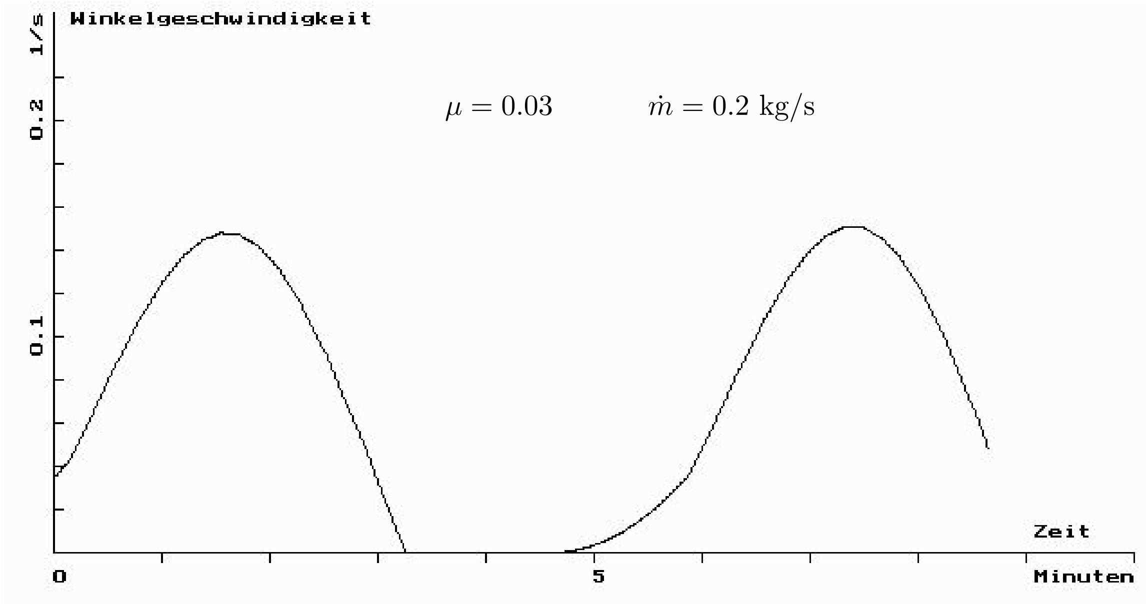
Ergänzung

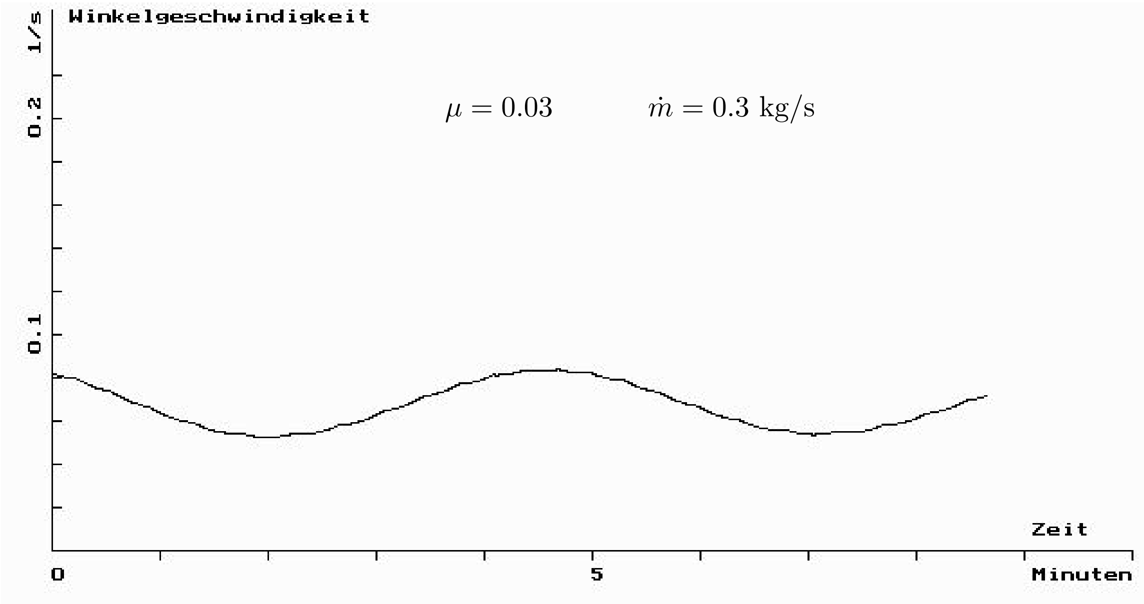
Wenn das Rad still steht, muss erst einmal die oberste Kammer so weit gefüllt werden, bis das Drehmoment des Gewichts des Wassers grösser wird als das Reibungsdrehmoment im Lager. Dann beginnt das Rad sich zu drehen. Es fliesst aber immer noch Wasser zu und das Drehmoment wird grösser. Das Rad beschleunigt und dreht immer schneller. Damit bleibt für die einzeln Kammern weniger Zeit, um sich mit Wasser zu füllen, das antreibende Drehmoment wird kleiner, schliesslich wird es kleiner als das Reibungsdrehmoment und das Rad wird abgebremst (und kommt vielleicht sogar zum Stillstand), dann haben die Kammern wieder mehr Zeit, sich zu füllen, das antreibende Drehmoment wird wieder grösser, usw.

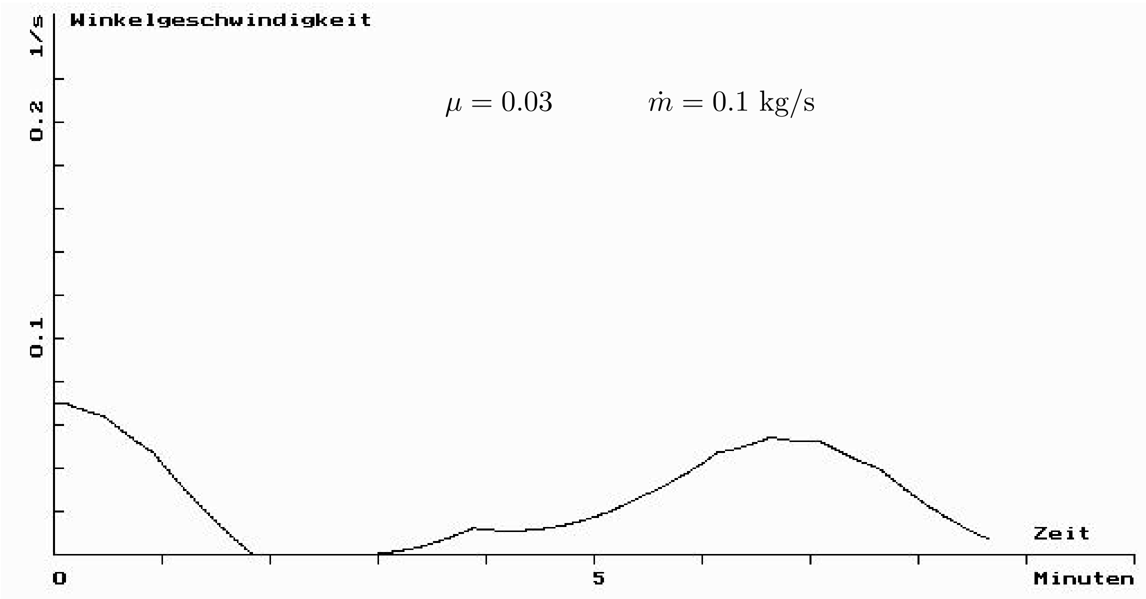
Es wurde versucht, das Verhalten des Wasserrades mit einem Pascalprogramm zu simulieren. Um mit „schöneren“ Zahlen arbeiten zu können, wurden 60 statt 65 Zellen angenommen. Das gibt für den Bereich 0° bis 90° 15 Zellen, also 6° für eine Zelle. Nach einem Drehwinkel von jeweils 6° müssen also die Zelleninhalte umnummeriert werden: $m[j] := m[j-1]$. Die sich nach unten drehenden Zellen beginnen sich je nach Füllzustand wieder zu entleeren. Für vollständig gefüllte Zellen, kann das Entleeren relativ leicht beschrieben werden, aber für nur teilweise gefüllte Zellen beginnt das Entleeren je nach Füllzustand bei einem anderen Drehwinkel. Wenn das berücksichtigt werden sollte, müsste für jede Zelle der Füllzustand berechnet werden und eine Buchhaltung für alle 15 Zellen geführt werden. Zur Vereinfachung wurde so gerechnet, als ob alle Zellen randvoll gefüllt würden. Das ist nicht sehr kritisch, da die Zellen, die sich merklich entleeren, auf Grund ihrer Position ohnehin nur noch einen kleinen Beitrag zum Antriebsdrehmoment liefern.

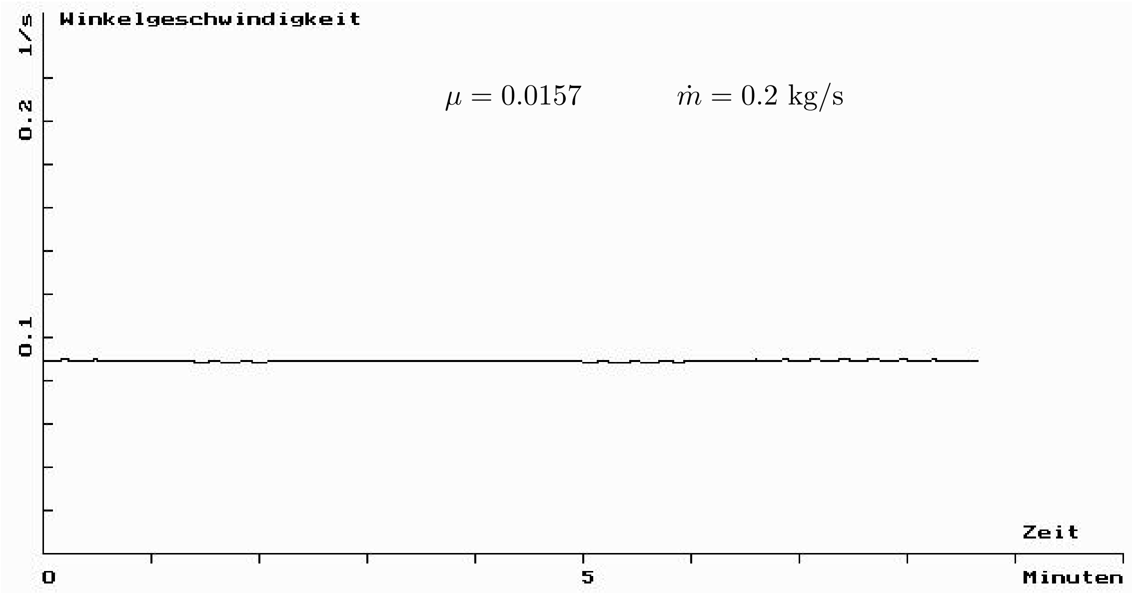
Bei der Simulation können als Parameter der Reibungskoeffizient μ im Gleitlager und der Wasserzufluss $\dot{m}$ (in kg/s) gewählt werden. Je nach Wahl der Parameter können sich eine konstante Winkelgeschwindigkeit, Oszillationen der Winkelgeschwindigkeit, gedämpfte Oszillationen und chaotische Bewegungen ergeben.




Winkelgeschwindigkeit
1/s
0.2
0.1
$\mu = 0.03$ $\dot{m} = 0.2$ kg/s
Zeit
0
5
Minuten


Winkelgeschwindigkeit
1/s
0.2
0.1
$\mu = 0.03$ $\dot{m} = 0.3$ kg/s
Zeit
0
5
Minuten


Winkelgeschwindigkeit
1/s
0.2
0.1
$\mu = 0.03$ $\dot{m} = 0.1$ kg/s
Zeit
0
5
Minuten



12. und 29. Dezember 2024

A. Ruh