Warum fällt ein Satellit nicht herunter?

Die einfachste Antwort auf diese Frage ist: Tut er doch – und zwar ständig! [1]

Diese eigenartige Antwort findet sich bereits in der Science-Fiction-Kurzgeschichte „Zwischenfall mit Heliopolis. Eine wahre Geschichte aus dem Jahre 1958“ [1] von Heinz Gartmann im Band 67 des Jugend-Jahrbuchs „Das Neue Universum“ [2].

„Erhält also die Rakete eine Geschwindigkeit von 7,9 Kilometer pro Sekunde, dann ‚fällt sie immer um die Erde herum‘“. [2]

Damals und noch etliche Jahre später fand ich diese Erklärung etwas seltsam. Ein Satellit fällt doch nicht herunter, weil die Erdanziehungskraft und die Zentrifugalkraft, die auf ihn wirken[3], stets gleich gross sind. Erst viele Jahre später, als ich ein Pascal-Programm schrieb, das Bahnen eines Körpers im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers zeichnet, realisierte ich, dass ein Erdsatellit tatsächlich „um die Erde herumfällt“.

Im Folgenden wird eine perfekt kugelförmige und atmosphärenlose Erde betrachtet.

Ein Körper werde 1000 km über der flachen Erdoberfläche horizontal abgeschossen. Wenn die Erdoberfläche eine Ebene wäre und die Erdanziehung überall senkrecht dazu gerichtet wäre, ergäbe sich als Flugbahn eine Parabel. Tatsächlich ist die Wurfparabel eine Näherung, die nur für so kleine Wurfdistanzen gilt, dass die Krümmung der Erdoberfläche (und die Änderung der Richtung der Erdanziehung) vernachlässigt werden kann. In Wirklichkeit ist die Flugbahn ein Teil einer Ellipse.

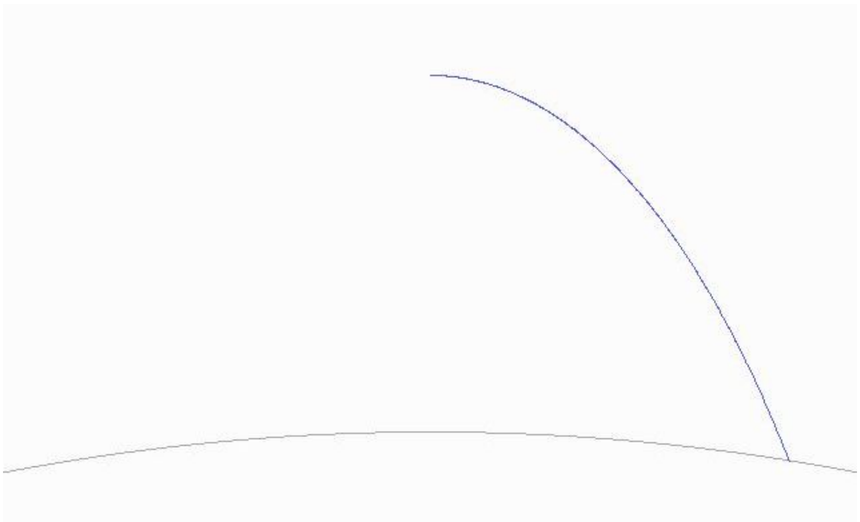

Abbildung 1: $v_0 = 2$ km/s

[1] Der erste Satellit, Sputnik, wurde bereits am 4. Oktober 1957 von der Sowjetunion gestartet. Der erste bemannte Satellit, Saljut 1, wurde jedoch erst am 19. April 1971 in eine Umlaufbahn gebracht, war aber insofern ein Misserfolg, als alle drei Besatzungsmitglieder auf dem Rückflug in der Sojus 11 beim Wiedereintritt in die Atmosphäre ums Leben kamen. Die erste erfolgreiche bemannte Raumstation war das amerikanische Skylab, das am 14. Mai 1973 gestartet wurde.

[2] Die Geschwindigkeit von 7,9 km/s gilt für eine Rakete, die dicht über der Erdoberfläche starten würde.

[3] vom mitbewegten Bezugssystem aus gesehen

Wird die Anfangsgeschwindigkeit v_0 erhöht, so wird die Wurfweite grösser. Nach dem „Abwurf“ mit der horizontalen Geschwindigkeit v_0 fällt der Satellit fortwährend.

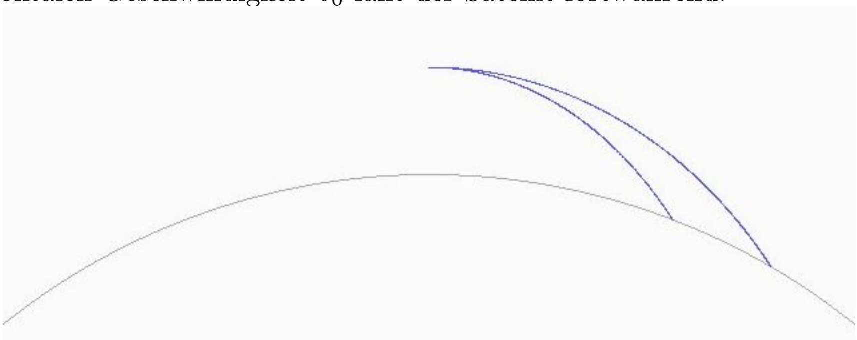

Abbildung 2: $v_0 = 4$ km/s und 5 km/s

Bei noch grösserer Anfangsgeschwindigkeit, macht sich die Erdkrümmung immer stärker bemerkbar. Der Satellit fällt immer noch.

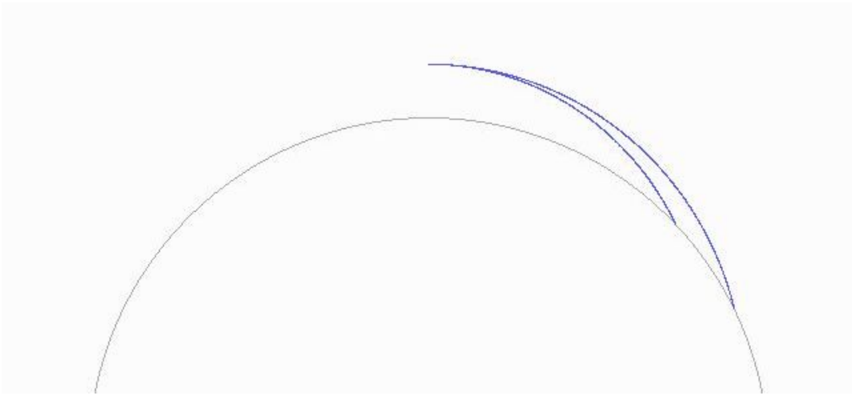

Abbildung 3: $v_0 = 6$ km/s und 6.5 km/s

Eine weitere kleine Steigerung der Anfangsgeschwindigkeit bewirkt eine starke Erhöhung der Wurfweite. Der Satellit fällt noch immer.

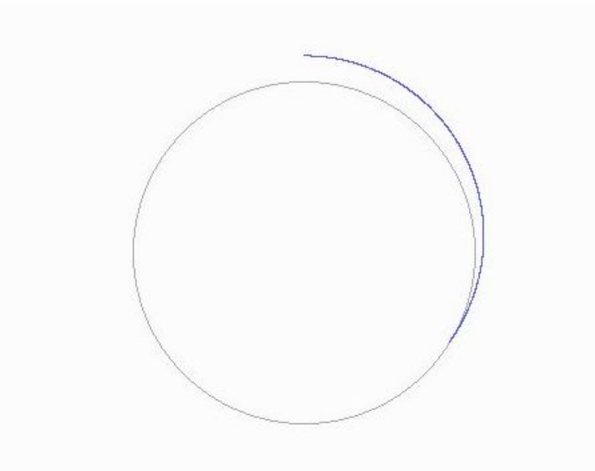

Abbildung 4: $v_0 = 7$ km/s

Fast hätte es gereicht....

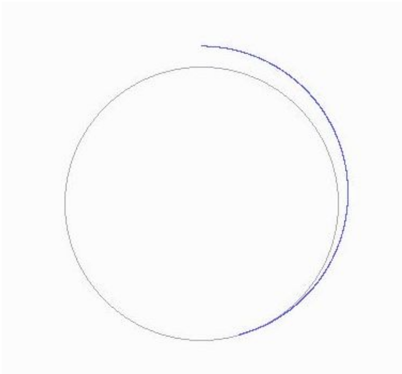

Abbildung 5: $v_0 = 7.075$ km/s

...und mit einer nur wenig höheren Geschwindigkeit fällt der Satellit tatsächlich um die Erde herum.

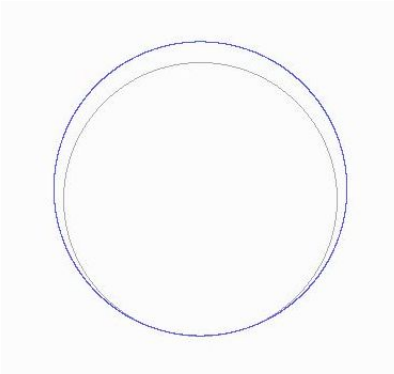

Abbildung 6: $v_0 = 7.08$ km/s

Mit der richtigen Geschwindigkeit ergibt sich (nahezu) eine Kreisbahn.

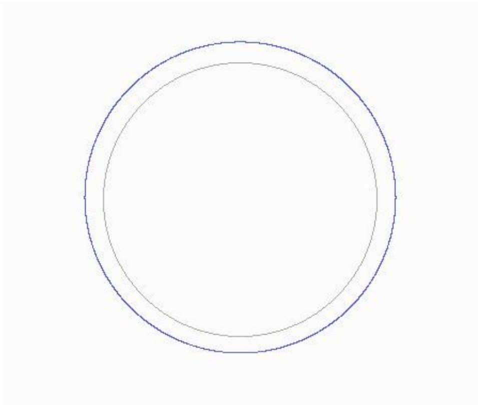

Abbildung 7: $v_0 = 7.3$ km/s

Der Autor der erwähnten Science-Fiction-Geschichte, Heinz Gartmann (1917 - 1960) [3], war ein Raketenfachmann und liess daher die Hauptfigur seiner Geschichte die Bedingungen einer Satellitenbahn völlig korrekt erklären:

„Der Reporter macht es seinen Hörern und späteren Lesern leicht. Er stellt ihnen ein Raketengeschütz vor, das die Projektile waagerecht, also parallel zur Erdoberfläche starten lässt. Die Raketen fliegen eine weite Stecke, aber die Anziehungskraft der Erde packt sie und zwingt sie zu Boden. Ihre Bahn ist ein Teil einer Ellipse, die die Erdoberfläche im Aufschlagpunkt schneidet. Nun ist aber die Erdoberfläche gar nicht eben. Sie krümmt sich gewissermassen unter der weiten Raketenbahn, sie weicht ein Stück zurück. Die Frage ist also, ‚in welcher Entfernung weicht die Oberfläche der Erde gerade um den Betrag zurück, der jener Höhe entspricht, um welche die Rakete während ihres Fluges unter der Wirkung der Anziehungskraft fällt?' "

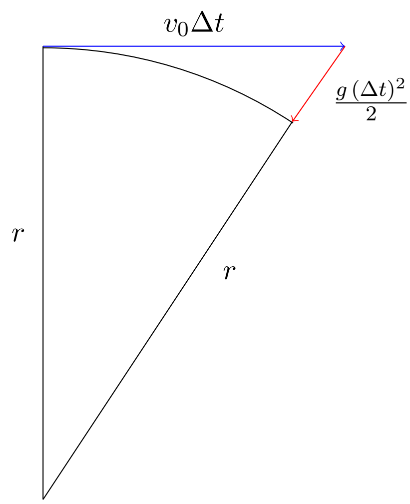

Abbildung 8: Fall eines Satelliten im Zeitintervall Δt

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ergibt sich die Beziehung:

$$r^2 + (v_0\,\Delta t)^2 = \left(r + \frac{1}{2}\,g\,(\Delta t)^2\right)^2 \tag{1}$$

g ist die Fallbeschleunigung im Abstand r vom Erdzentrum. Sie ist gleich der Gravitationsfeldstärke:

$$g = G\,\frac{M}{r^2} \tag{2}$$

G ist die Gravitationskonstante und M ist die Masse der Erde.

Da

$$\frac{1}{2}\,g\,(\Delta t)^2 \ll r\,, \tag{3}$$

kann die Klammer auf der rechten Seite der Gleichung (1) entwickelt werden:

$$\left(r + \frac{1}{2}\,g\,(\Delta t)^2\right)^2 = r^2\,\left(1 + \frac{g\,(\Delta t)^2}{2\,r}\right)^2 \approx r^2 + g\,r\,(\Delta t)^2\,. \tag{4}$$

Einsetzen in Gleichung (1) liefert

$$v_0^2\,(\Delta t)^2 = g\,r\,(\Delta t)^2 \tag{5}$$

und schliesslich

$$\frac{v_0^2}{r} = g\,, \tag{6}$$

also genau die Beziehung, die sich aus der Bedingung „Zentrifugalkraft = Anziehungskraft“ ergibt.

In der Science-Fiction-Geschichte von Gartmann läuft die Raumstation „Heliopolis“ in einer Höhe von 1670 Kilometer um die Erde. Der Erdradius am Äquator beträgt 6378 km. Der Bahnradius der Raumstation ist somit 8048 km. In diesem Abstand vom Erdzentrum ergibt sich für die Fallbeschleunigung:

$$g = 6.674 \cdot 10^{-11} \, \frac{5.972 \cdot 10^{24}}{(8.048 \cdot 10^6)^2} = 6.154\,. \tag{7}$$

Mit $g = 6.154$ m/s^2 wird

$$v_0 = \sqrt{g\,r} = \sqrt{6.154 \cdot 8.048 \cdot 10^6} = 7.037 \cdot 10^3\,. \tag{8}$$

Die Geschwindigkeit der Raumstation „Heliopolis“ für eine Kreisbahn 1670 km über der Erdoberfläche beträgt somit 7.04 km/s. Seltsamerweise erzählt jedoch Gartmann, die Raumstation bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 7200 m/s. Die Theorie der Bahndynamik von Satelliten hat Gartmann sicher richtig verstanden. Hat er sich numerisch verrechnet?

Wenn ein Satellit im Abstand r_1 vom Erdzentrum die Geschwindigkeit v_0 hat, dann ergibt sich für die grosse Halbachse der Ellipsenbahn:

$$a = \frac{1}{1 - \dfrac{r_1\,v_0^2}{2\,G\,M}} \, \frac{r_1}{2}\,. \tag{9}$$

Für $r_1 = 8048$ km und $v_0 = 7200$ m/s wird $a = 8443$ km. Da $a > r_1$ und vorausgesetzt wird, dass $\vec{v}_0$ senkrecht steht zu $\vec{r}_1$, ist r_1 der Abstand des Perigäums vom Erdzentrum. Der Abstand des Apogäums ist dann

$$r_2 = 2\,a - r_1 = 8838 \text{ km}\,. \tag{10}$$

Wenn also der Satellit im Perigäum 1670 km über der Erdoberfläche eine Geschwindigkeit von 7.2 km/s hätte, dann wäre er im Apogäum 2460 km über der Erdoberfläche.

Literatur

[1] https://m.simplyscience.ch
https://m.simplyscience.ch/teens-liesnach-archiv/articles/warum-fallt-ein-satellit-nicht-vom-himmel.html

[2] Das Neue Universum, Band 67, Union Deutsche Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1950.

[3] https://de.wikipedia.org/wiki/Heinz_Gartmann

23. Dezember 2019

A. Ruh