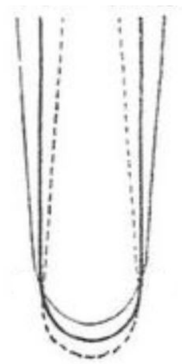
Eigenfrequenz einer Stimmgabel

Wie kann die Eigenfrequenz einer Stimmgabel berechnet werden?

Eine Stimmgabel ist im wesentlichen ein U-förmig gebogener Metallstab, dessen Enden hin- und herschwingen.

Stimmgabel



Schwingungen der Stimmgabel

Abbildung 1: Stimmgabel

Da in der Mitte der Gabel, d.h. am tiefsten Punkt des „U“, die Richtung der Achse des Stabes sich während der Schwingung nicht ändert, kann eine „Zinke“ der Gabel auch durch einen Stab dargestellt werden, der an einem Ende fest eingespannt ist. Ferner wird die Krümmung der Zinke nicht berücksichtigt, d.h. es werden die Biegeschwingungen eines geraden Stabes betrachtet.

Wird ein an einem Ende fest eingespannter Stab am anderen Ende durch eine senkrecht zur Stabachse wirkende Kraft $\vec{F}$ beansprucht, so verbiegt er sich und das Stabende verschiebt sich um die Strecke s.

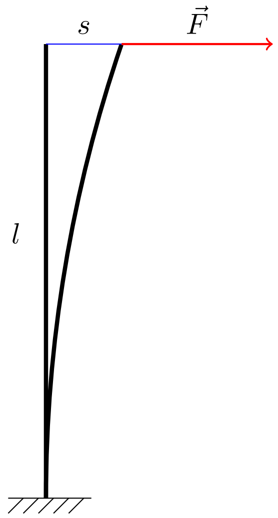


Abbildung 2: Biegung eines Stabes

Die durch die Kraft F bewirkte Durchbiegung s ergibt sich aus der Beziehung

$$s = \frac{l^3}{3\,E\,I}\,F\,. \qquad [1, 2, 3, 4] \tag{1}$$

l ist die Länge des Stabes, E ist der Elastizitätsmodul des Stabmaterials und I ist das Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnitts.

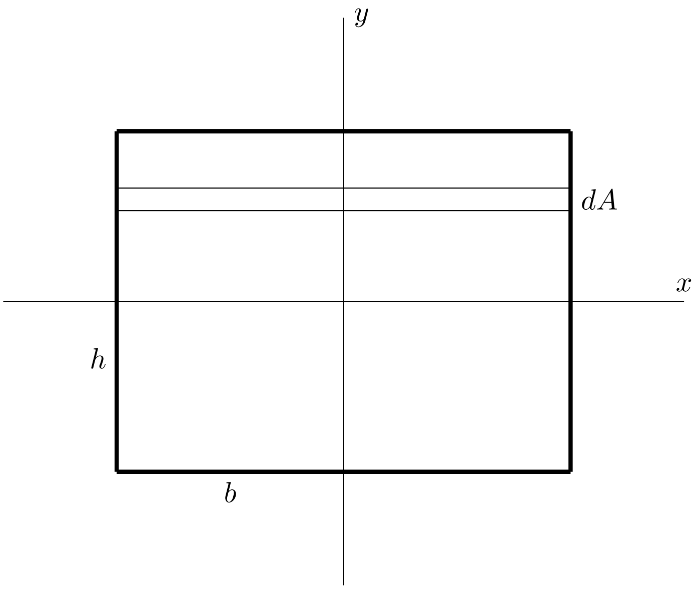


Abbildung 3: Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment des Querschnitts eines Stabes, der in der Richtung y auf Biegung beansprucht wird, ist definiert als

$$I = \int y^2\,dA\,. \tag{2}$$

Für einen rechteckigen Querschnitt der Breite b und der Höhe h ergibt die Integration

$$I = \frac{b\,h^3}{12}\,. \tag{3}$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser d ergibt sich

$$I = \frac{\pi\,d^4}{64}\,. \tag{4}$$

Die elastische Linie (oder Biegelinie) des gebogenen Stabes ist gegeben durch

$$y = \frac{F}{E\,I}\left(\frac{1}{2}\,l\,z^2 - \frac{z^3}{6}\right)\,. \qquad [2, 3, 4] \tag{5}$$

Aus (1) folgt

$$F = \frac{3\,E\,I}{l^3}\,s \tag{6}$$

und dies eingesetzt in (5) ergibt

$$y = \frac{3}{l^3}\left(\frac{1}{2}\,l\,z^2 - \frac{z^3}{6}\right)\,s\,. \tag{7}$$

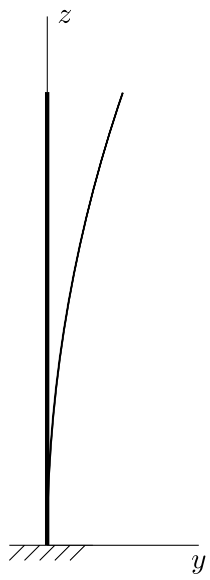


Abbildung 4: Elastische Linie des gebogenen Stabes

Differenzieren nach der Zeit und Quadrieren liefert

$$\dot{y}^2 = \frac{1}{4\,l^6}\left(9\,l^2\,z^4 - 6\,l\,z^5 + z^6\right)\,\dot{s}^2\,. \tag{8}$$

Die totale kinetische Energie des schwingenden Stabes ist:

$$T = \int \frac{\dot{y}^2}{2}\,dm = \int\limits_0^l \frac{\dot{y}^2}{2}\frac{m}{l}\,dz\,. \tag{9}$$

Einsetzen von (8) in (9) und Integrieren ergibt

$$T = \frac{m}{8\,l^7}\left[\frac{9}{5}\,l^2\,z^5 - l\,z^6 + \frac{1}{7}\,x^7\right]_0^l \dot{s}^2 = \frac{33}{8\cdot 35}\,m\,\dot{s}^2 = 0.1179\,m\,\dot{s}^2\,. \tag{10}$$

Für die potentielle Energie des gebogenen Stabes ergibt sich

$$V = \int\limits_0^s F\,dy = \int\limits_0^s \frac{3\,E\,I}{l^3} y\,dy = \frac{3\,E\,I}{l^3}\frac{s^2}{2}\,. \tag{11}$$

Mit den Ausdrücken (10) und (11) für T und V und mit der Umbezeichnung $s = q$ wird die Lagrangefunktion

$$L = T - V = 0.1179\,m\,\dot{q}^2 - \frac{3}{2}\,\frac{E\,I}{l^3}\,q^2\,. \tag{12}$$

Die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{13}$$

lautet somit

$$0.2357\,m\,\ddot{q} - \frac{3\,E\,I}{l^3}\,q = 0\,. \tag{14}$$

Das ist die Differentialgleichung

$$\ddot{q} - \omega^2\, q = 0 \tag{15}$$

einer harmonischen Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{0.2357}\,\frac{E\,I}{m\,l^3}} = \sqrt{12.73\,\frac{E\,I}{m\,l^3}} = 3.568\,\sqrt{\frac{E\,I}{m\,l^3}}\,. \tag{16}$$

Wenn die Fläche des Stabquerschnitts mit A und die Dichte des Stabmaterials mit ϱ bezeichnet wird, ist $m = \varrho\,A\,l$, und es ergibt sich

$$\omega = 3.568\,\sqrt{\frac{E}{\varrho}\,\frac{I}{A\,l^4}}\,. \tag{17}$$

Als starke Vereinfachung wurde angenommen, dass der Stab durch an eine am einen Ende angreifende Kraft $\vec{F}$ deformiert wird.

In ihrem Artikel „Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories“ [5] finden S.M. Han, H. Benaroya und T. Wei für das Euler-Bernoulli-Modell eines einseitig eingespannten Stabes die Kreisfrequenz

$$\omega = 3.516\,\sqrt{\frac{E}{\varrho}\,\frac{I}{A\,l^4}}\,. \tag{18}$$

Das Resultat der stark vereinfachten Rechnung unterscheidet sich also vom Resultat der genaueren Rechnung nur um den Faktor

$$\frac{3.568}{3.516} = 1.015\,, \tag{19}$$

also nur um 1.5 %.

Die Frequenz $\nu = \omega/2\,\pi$ wird schliesslich

$$\nu = \frac{1}{2\,\pi}\,\sqrt{12.73\,\frac{E\,I}{\varrho\,A\,l^4}}\,. \tag{20}$$

Stoffwerte [3]:

Stahl:	$E = 2.1 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$	$\varrho = 7.8 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$	$E/\varrho = 2.7 \cdot 10^7\ \mathrm{m^2/s^2}$
Aluminium:	$E = 0.73 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$	$\varrho = 2.7 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$	$E/\varrho = 2.7 \cdot 10^7\ \mathrm{m^2/s^2}$

Damit wird

$$\nu = \frac{1}{2\,\pi}\,\sqrt{3.44 \cdot 10^8\,\frac{I}{A\,l^4}}\,. \tag{21}$$

$$[I] = \mathrm{m}^4 \quad [A] = \mathrm{m}^2 \quad [l] = \mathrm{m} \quad [\nu] = \mathrm{s}^{-1} \tag{22}$$

Rechteckiger Querschnitt

Siehe Abbildung 3

$$I = \frac{b\,h^3}{12} \qquad A = b\,h \tag{23}$$

$$\nu = 852\,\frac{h}{l^2} \qquad [h] = [l] = \mathrm{m} \quad [\nu] = \mathrm{s}^{-1} \tag{24}$$

Kreisförmiger Querschnitt

Kreis mit Durchmesser d

$$I = \frac{\pi\, d^4}{64} \qquad A = \frac{\pi\, d^2}{4} \tag{25}$$

$$\nu = 738\, \frac{d}{l^2} \qquad [d] = [l] = \mathrm{m} \quad [\nu] = \mathrm{s}^{-1} \tag{26}$$

Beispiele

1

Stimmgabel 440 Hz [1]

Abbildung 5: 440 Hz-Stimmgabel

$d = 4.5$ mm
In der Abbildung wurden die ganze Länge der Stimmgabel und die Länge der Zinken gemessen und aus dem Verhältnis und dem gegebenen Wert für die gesamte Länge wurde die Länge l der Zinken bestimmt.
$l = 8.6$ cm
Da für die gesamte Länge nur ein ungefährer Wert angegeben wird, ist auch die Länge l nicht genau bekannt.
Die Zinken sind offenbar rund und haben einen Durchmesser von 4.5 mm.
$d = 4.5$ mm

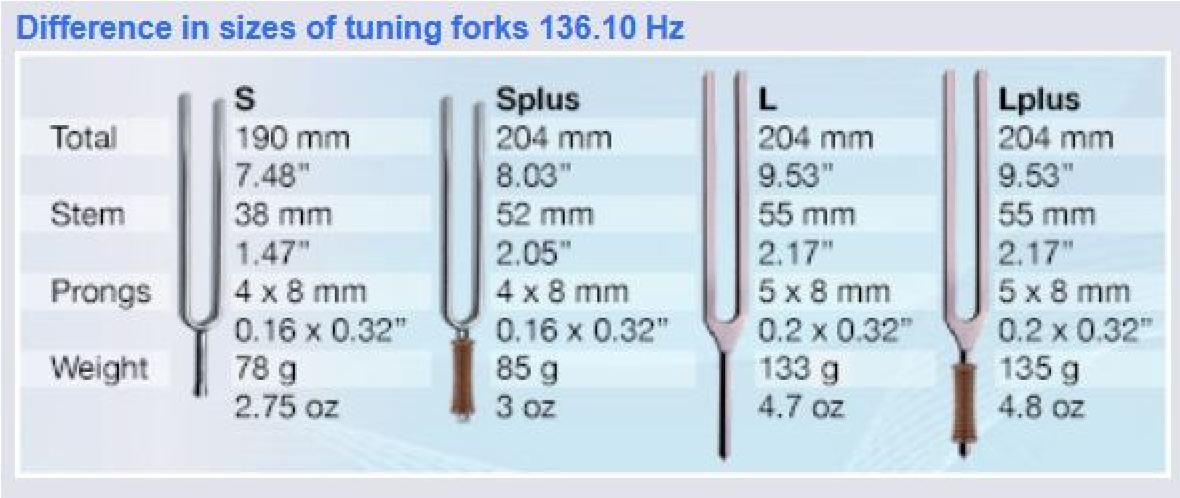
$$\nu = 738\, \frac{4.5 \cdot 10^{-3}}{(8.6 \cdot 10^{-2})^2} = 449 \tag{27}$$

$$\boxed{\nu = 449 \text{ Hz}}$$

[1] https://www.amazon.de/ts-ideen-1622-440-Hz-Stimmgabel/dp/B0029RR3I4

2

Stimmgabel 136 Hz [2]



Difference in sizes of tuning forks 136.10 Hz

	S	Splus	L	Lplus
Total	190 mm	204 mm	204 mm	204 mm
	7.48"	8.03"	9.53"	9.53"
Stem	38 mm	52 mm	55 mm	55 mm
	1.47"	2.05"	2.17"	2.17"
Prongs	4 x 8 mm	4 x 8 mm	5 x 8 mm	5 x 8 mm
	0.16 x 0.32"	0.16 x 0.32"	0.2 x 0.32"	0.2 x 0.32"
Weight	78 g	85 g	133 g	135 g
	2.75 oz	3 oz	4.7 oz	4.8 oz

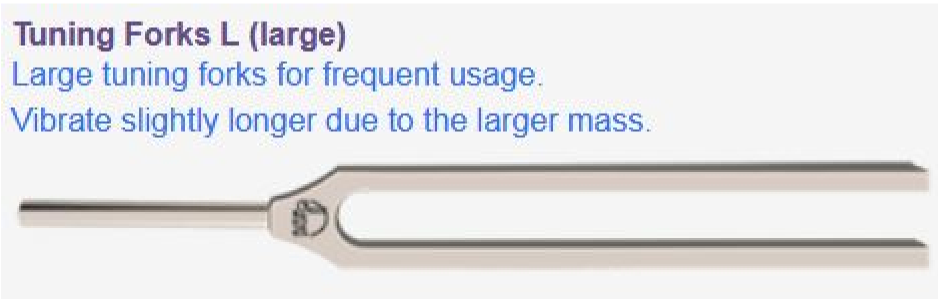


Abbildung 6: 136 Hz-Stimmgabel

Die Tabelle enthält einen offensichtlichen Fehler. Für die Länge der Stimmgabel „Splus“ wird 8.03 Zoll und 204 mm angegeben, was übereinstimmt. Die Stimmgabeln „L“ und „Lplus“haben dagegen eine Länge von 9.53 Zoll und können somit nicht ebenfalls 204 mm lang sein. Die Länge in mm ist offenbar 242. Wieder kann durch Ausmessen der Abbildung die Länge der Zinken bestimmt werden.
Es ergibt sich $l = 170$ mm.
Für die Stimmgabel „L“ ist $h = 5$ mm.

$$\nu = 852\,\frac{5 \cdot 10^{-3}}{0.170^2} = 147 \tag{28}$$

$\boxed{\nu = 147 \text{ Hz}}$

[2] https://shop.planetware.de/Tuning-Forks

3

Hacke

Abbildung 7: Hacke

Wenn mit der abgebildeten Hacke auf Steine geschlagen wird, ist manchmal ein hoher Ton zu hören. Die Zinken der Hacke können wie eine Stimmgabel schwingen.

$l = 7$ cm $\qquad h = 8$ mm

$$\nu = 852 \, \frac{8 \cdot 10^{-3}}{0.07^2} = 1390 \tag{29}$$

$\boxed{\nu = 1390 \text{ Hz}}$

Anhang

Berechnung der Flächenträgheitsmomente

Rechteckiger Querschnitt

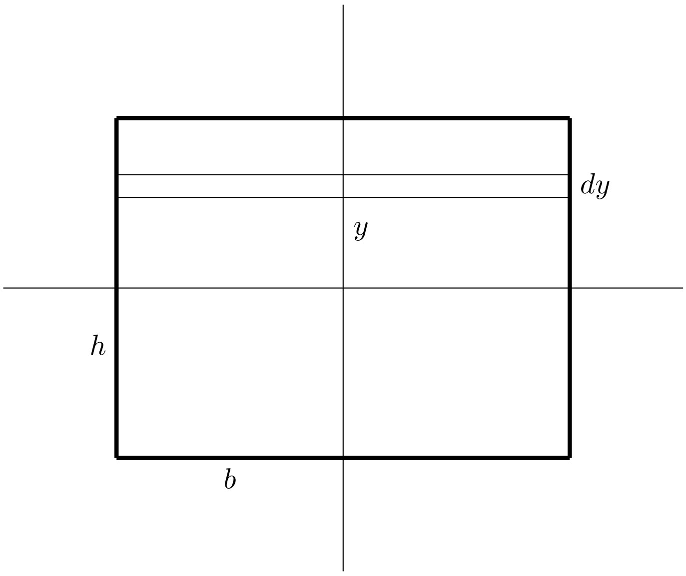


Abbildung 8: Flächenträgheitsmoment eines rechteckigen Querschnitts

$$I = \int y^2 \, dA = 2 \int_0^{h/2} y^2 \, b \, dy = 2 \, b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{h/2} = 2 \, b \, \frac{h^3}{3 \cdot 8} = \frac{b \, h^3}{12} \, . \tag{30}$$

Kreisförmiger Querschnitt

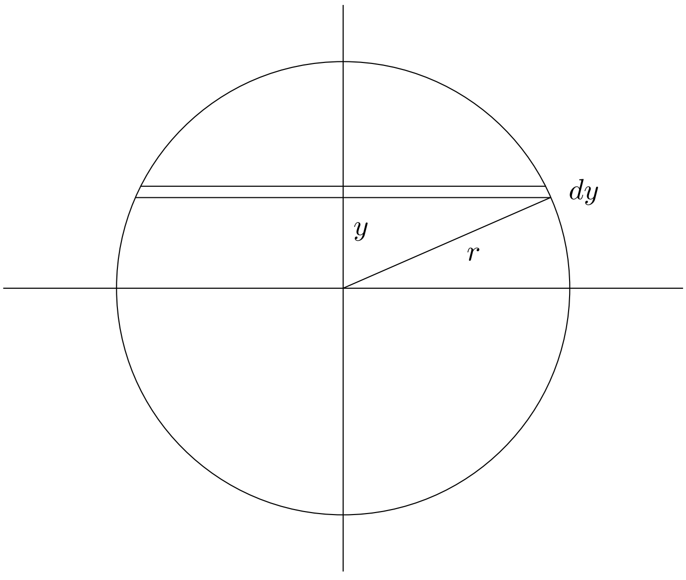


Abbildung 9: Flächenträgheitsmoment eines kreisförmigen Querschnitts

$$I = 2 \int_0^r 2\, y^2 \sqrt{r^2 - y^2}\, dy \tag{31}$$

$$\text{Substitutionen:} \quad y = r \sin\alpha \qquad y^2 = r^2 \sin^2\alpha \qquad dy = r \cos\alpha\, d\alpha \tag{32}$$

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} r^2 \sin^2\alpha \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2\alpha}\; r \cos\alpha\, d\alpha = 4\, r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha\,. \tag{33}$$

Die Stammfunktion von $\sin^2 x \cos^2 x$ ist [6]:

$$\frac{2\,x - \dfrac{\sin 4x}{2}}{16} + c \tag{34}$$

Beweis:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2\,x - \dfrac{\sin 4x}{2}}{16} + c\right) = \frac{1}{8}\,(1 - \cos 4x) = \frac{1}{8}\,(1 - (1 - 2\sin^2 2x)) = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \tag{35}$$

$$= \frac{1}{4}\,(2 \sin x \cos x)^2 = \sin^2 x \cos^2 x \quad \surd$$

Damit wird

$$I = 4\, r^4 \left[\frac{2\,x - \dfrac{\sin 4x}{2}}{16}\right]_0^{\pi/2} = 4\, r^4\, \frac{\pi - \dfrac{\sin 2\pi}{2}}{16} = 4\, r^4\, \frac{\pi - 0}{16} = \frac{\pi\, r^4}{4} = \frac{\pi\, d^4}{64}\,. \tag{36}$$

Literatur

[1] Hans Ziegler, *Mechanik I*, Verlag Birkhäuser, Basel 1948.

[2] P. Frauenfelder, P. Huber, *Physik, Band 1*, Ernst Reinhardt Verlag, Basel 1951.

[3] D. Mende, G. Simon, *Physik. Gleichungen und Tabellen*, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1971.

[4] http://wandinger.userweb.mwn.de/TM2/index.html v3_3.pdf

[5] Seon M. Han, Haym Benaroya and Timothy Wei, *Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories*, Journal of Sound and Vibration (1999) **225**(5), 935 - 988. Gleichung (83) und Tabelle 6.
Vibrating Beams
https://www.researchgate.net/publication/222446250_Dynamics_of_Transversely_Vibrating_Beams_Using_Four_Engineering_Theories

[6] https://www.integralrechner.de/

30. April 2020
A. Ruh