Fallzeit in einem Wasserfall

Wie lange dauert der Fall des Wassers in einem 800 m hohen Wasserfall[1]?

Freier Fall ohne Luftwiderstand

Für einen freien Fall mit der Erdbeschleunigung g ohne Luftwiderstand aus der Höhe h wäre die Fallzeit gegeben durch

$$t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,. \tag{1}$$

Für $h = 800$ m ergibt sich mit $g = 9.81$ ms^{-2} eine Fallzeit von 12.8 Sekunden.

Fall mit Luftwiderstand

Natürlich kann der Effekt des Luftwiderstandes nicht vernachlässigt werden. Wenn der Wasserstrahl sofort oder nach kurzer Fallstrecke in einzelne Tropfen zerfällt, kann der Fall von Wassertropfen betrachtet werden. Entgegen der weitverbreiteten Meinung haben fallende Wassertropfen nicht die klassische Tropfenform.

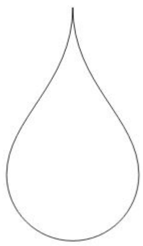

Abbildung 1: Klassische Tropfenform
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Tropfen

Tropfen, die einen Durchmesser von weniger als 2 mm haben, sind kugelförmig. Bei Durchmessern zwischen 2 und 5 mm wird die Unterseite des Tropfens abgeflacht und schliesslich eingedellt. Tropfen mit mehr als 5 mm Durchmesser zerfallen in kleinere Tropfen (siehe Abbildung 2).

In erster Näherung werden daher die Wassertropfen als Kugeln betrachtet. Für eine Kugel mit Durchmesser d, die mit der Geschwindigkeit v von einem Fluid mit der Dichte ϱ_F und der Viskosität η umströmt wird, ist die Reynoldszahl Re definiert durch

$$Re = \frac{\varrho_F\, v\, d}{\eta}\,. \tag{2}$$

Für $Re > 10$ ist die Strömung um eine Kugel turbulent. In einer turbulenten Strömung ist der Widerstand eines umströmten Körpers gegeben durch

$$F_W = c_W\,\frac{\varrho_F\, v^2}{2}\,A \tag{3}$$

[1]Der höchste Wasserfall der Welt ist der Salto Àngel im Südosten Venezuelas. Gesamthöhe: 979 m, Höhe der höchsten Einzelstufe: 805 m

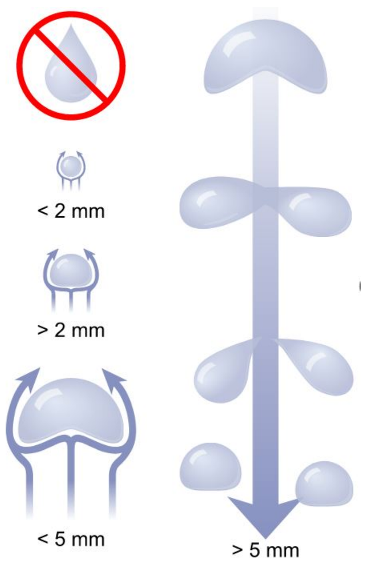

Abbildung 2: Tropfenformen
Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Drop_(liquid)

Dabei ist c_W der Widerstandskoeffizient, ϱ_F die Dichte des Fluids und A die Querschnittsfläche des umströmten Körpers. Für eine Kugel ist c_W im Bereich $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$ nahezu konstant und näherungsweise gleich 0.4.

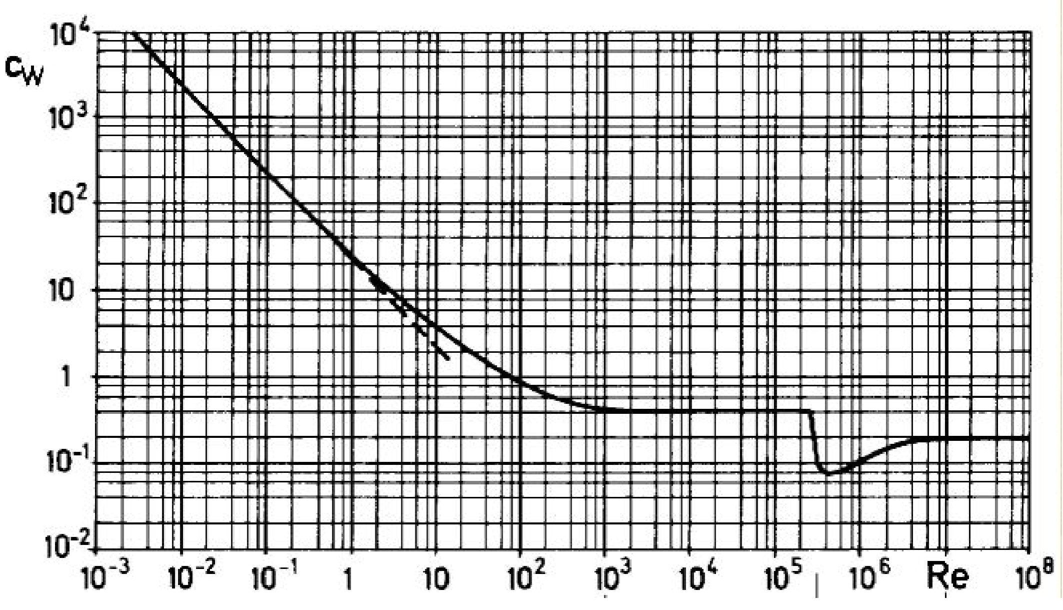

Abbildung 3: Widerstandskeoffizient einer Kugel als Funktion der Reynoldszahl
Quelle: http://www.peter-junglas.de/fh/vorlesungen/stroemungslehre2/html/kap1-6.html

Bewegungsgleichung

Ein fallender Körper, der dem Luftwiderstand ausgesetzt ist, hat die Bewegungsgleichung

$$m \frac{dv}{dt} = m\, g - c_W \frac{\varrho_F\, v^2}{2} A\,. \tag{4}$$

Für einen kugelförmigen Wassertropfen mit Radius r und Dichte ϱ_W gilt:

$$m = \varrho_W \frac{4\,\pi}{3} r^3 \tag{5}$$

$$A = \pi\, r^2 \tag{6}$$

Dies eingesetzt in Gleichung (4) ergibt:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3}{8} c_W \frac{\varrho_F}{\varrho_W} \frac{1}{r} v^2\,. \tag{7}$$

Stationärer Zustand

Im stationären Zustand ist $dv/dt = 0$ und die Geschwindigkeit hat den konstanten Wert

$$v_E = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{1}{c_W} \frac{\varrho_W}{\varrho_F}\, g\, r}\,. \tag{8}$$

v_E ist die Endgeschwindigkeit, die asymptotisch erreicht wird.

Für Luft kann eine Dichte $\varrho_F = 1.20$ kgm^{-3} und eine Viskosität $\eta = 1.80 \cdot 10^{-5}$ kgm^{-1}s^{-1} angenommen werden. Es ergeben sich folgende Werte:

$$r = 0.1 \text{ mm} \quad v = 2.34 \text{ m/s} \quad \text{Re} = 31 \tag{9}$$

$$r = 0.5 \text{ mm} \quad v = 5.23 \text{ m/s} \quad \text{Re} = 349 \tag{10}$$

$$r = 1.0 \text{ mm} \quad v = 7.40 \text{ m/s} \quad \text{Re} = 987 \tag{11}$$

$$r = 5.0 \text{ mm} \quad v = 16.6 \text{ m/s} \quad \text{Re} = 11100 \tag{12}$$

Für $r = 0.1$ mm ist Re $\ll 1000$ und c_W kann nicht mehr gleich 0.4 gesetzt werden. Für Re = 31 ergibt sich aus Abbildung 3 der Widerstandskoeffizient $c_W \approx 1.8$, womit aus Gleichung (8) die Geschwindigkeit $v = 1.10$ m/s folgt. Die nächsten Iterationsschritte $v \to \text{Re} \to c_w \to v$ liefern die Werte Re = 15 und $c_W = 3.2$, $v = 0.83$ m/s, Re = 11, $c_W = 3.9$ und $v = 0.75$ m/s. Tröpfchen mit einem Durchmesser $d \leq 0.2$ mm haben eine so geringe Fallgeschwindigkeit, dass sie auch durch einen schwachen Wind weggetragen werden. Ein schönes Beispiel für dieses Phänomen ist der Staubbachfall bei Lauterbrunnen (s. Abbildung 4).

Ab $r = 0.5$ mm ist $c_w = 0.4$ eine akzeptable Näherung.

Bei einer Fallhöhe von 800 m ergeben sich für Tropfen mit dem Durchmesser $d = 2\,r$ folgende Fallzeiten:

$$d = 1 \text{ mm} \quad t \approx 153 \text{ s} \tag{13}$$

$$d = 2 \text{ mm} \quad t \approx 108 \text{ s} \tag{14}$$

$$d = 10 \text{ mm} \quad t \approx 48 \text{ s} \tag{15}$$

Abbildung 4: Staubbachfall
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Staubbachfall

Beschleunigungsphase

Während der Beschleunigungsphase gilt die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha\, v^2 \tag{16}$$

mit

$$\alpha = \frac{3}{8}\, c_W\, \frac{\varrho_F}{\varrho_W}\, \frac{1}{r}\,. \tag{17}$$

Daraus wird

$$\frac{dv}{g - \alpha\, v^2} = dt \tag{18}$$

und mit den Substitutionen

$$x = \sqrt{\alpha}\, v \tag{19}$$

$$a^2 = g \tag{20}$$

ergibt sich

$$\frac{dx}{a^2 - x^2} = \sqrt{\alpha}\, dt\,. \tag{21}$$

Somit wird

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{dx}{a^2 - x^2}\,. \tag{22}$$

Aus (8) und (17) folgt

$$v_E = \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \tag{23}$$

und damit aus (19)

$$x = \sqrt{g}\, \frac{v}{v_E}\,. \tag{24}$$

Da stets $v \leq v_E$, ist $x \leq \sqrt{g}$. Aus der Beziehung (20) folgt $a = \sqrt{g}$ und somit ist $x \leq a$. Mit der Voraussetzung $x < a$ ergibt sich für das Integral in (22) das Resultat [1, 2]:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{artanh} \frac{x}{a}\,. \tag{25}$$

Also ist

$$\operatorname{artanh} \frac{x}{a} = a\, \sqrt{\alpha}\, t \tag{26}$$

und

$$\frac{x}{a} = \tanh\, a\, \sqrt{\alpha}\, t\,. \tag{27}$$

Einsetzen der Substitutionen (19) und (20) und der Beziehung (23) liefert

$$\frac{\sqrt{\alpha}\, v}{\sqrt{g}} = \tanh\, \sqrt{g}\, \frac{\sqrt{g}}{v_E}\, t \tag{28}$$

und schliesslich

$$v = v_E \tanh \frac{g\, t}{v_E}\,. \tag{29}$$

Der zurückgelegte Weg ergibt sich durch eine weitere Integration:

$$s = \frac{v_E^2}{g} \ln\, (\cosh \frac{g\, t}{v_E})\,. \tag{30}$$

Die Endgeschwindigkeit v_E wird theoretisch erst für $t \to \infty$ erreicht. Es wird nun die Zeit bestimmt, für die $v = 0.99 \cdot v_E$ gilt. Ab diesem Zeitpunkt wird mit der konstanten Geschwindigkeit $v = v_E$ weitergerechnet.

Aus

$$\tanh \frac{g\, t}{v_E} = 0.99 \tag{31}$$

folgt

$$\frac{g\,t}{v_E} = 2.647 \tag{32}$$

und damit

$$t = 2.647\,\frac{v_E}{g}\;. \tag{33}$$

Für $v_E = 5.23$ m/s wird $t = 1.41$ s und $s = 5.46$ m. Die totale Fallzeit wird damit:

$$t = 1.41\ \mathrm{s}\ + \frac{800 - 5.46}{5.23}\ \mathrm{s}\ = 153\ \mathrm{s}\ \ . \tag{34}$$

Für $v_E = 16.6$ m/s ist $t = 4.48$ s und $s = 55.0$ m, und die totale Fallzeit ist

$$t = 4.48\ \mathrm{s}\ + \frac{800 - 55}{16.6}\ \mathrm{s}\ = 49.4\ \mathrm{s}\ \ . \tag{35}$$

Die unter Berücksichtigung der Beschleunigungsphase berechneten Fallzeiten unterscheiden sich also nur unwesentlich von den mit konstanter Geschwindigkeit berechneten Zeiten.

Literatur

[1] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a.M. und Zürich 1964.

[2] https://www.integralrechner.de/

3. Oktober 2019
A. Ruh