Erwärmung eines Kabels

Problem

Ein Haushaltgerät, z.B. ein Staubsauger, sei mit einem zweiadrigen Kabel der Länge l_K an einer Steckdose angeschlossen. Wie stark erwärmt sich das Kabel, wenn das Gerät eine elektrische Leistung P aufnimmt?

Die Adern des Kabels haben einen Querschnitt q von 0.75 mm^2 und einen spezifischen Widerstand ϱ von $0.0178\,\Omega\text{mm}^2\text{m}^{-1}$. Der Aussendurchmesser d des Kabels ist 6.5 mm, und für die Wärmeübergangszahl α an der Kabeloberfläche werde 5 Wm^{-2}K^{-1} eingesetzt.

Die elektrische Leistung des Geräts sei 1500 W.

Lösung

Die Verlustleistung im Kabel ist gegeben durch die Beziehung

$$P_V = R\,I^2\,, \tag{1}$$

wobei R den gesamten Widerstand des Kabels und I den Strom im Kabel bedeuten.

Der Widerstand eines Drahtes mit der Länge l_D und dem Querschnitt q ist

$$R_D = \varrho\,\frac{l_D}{q}\,. \tag{2}$$

Der totale Widerstand eines zweiadrigen Kabels der Länge l_K ist somit

$$R = \varrho\,\frac{2\,l_K}{q}\,. \tag{3}$$

Der im Kabel fliessende Strom ist

$$I = \frac{P}{U}\,, \tag{4}$$

wobei U für die Netzspannung steht. Für die Verlustleistung ergibt sich schliesslich

$$P_V = \varrho\,\frac{2\,l_K\,P^2}{q\,U^2}\,. \tag{5}$$

Diese Leistung wird vom Kabel durch Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung an die Umgebung abgegeben. Wenn die Wärmeabgabe durch Wärmeleitung entlang des Kabels zu den Kabelenden vernachlässigt wird, ist die Wärmeabgabe durch Leitung und Konvektion gegeben durch:

$$\dot{Q}_K = \alpha\,\pi\,d\,l_K\,\Delta T\,. \tag{6}$$

α ist die Wärmeübergangszahl und ΔT ist die gesuchte Temperaturdifferenz zwischen Kabeloberfläche und Umgebung.

Der Wärmetransport durch Strahlung ist

$$\dot{Q}_S = \varepsilon\,\sigma(T^4 - T_0^4)\,\pi\,d\,l_K\,. \tag{7}$$

T ist die Temperatur der Kabeloberfläche und T_0 ist die Temperatur der Umgebung.

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ $\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante. Für das Emissionsverhältnis der schwarzen Kabeloberfläche kann in guter Näherung $\varepsilon = 1$ gesetzt werden.

Mit $T = T_0 + \Delta T$ kann die Differenz $T^4 - T_0^4$ entwickelt werden:

$$T^4 - T_0^4 = (T_0 + \Delta T)^4 - T_0^4 = T_0^4 + 4\,T_0^3\,\Delta T + \ldots - T_0^4 = 4\,T_0^3\,\Delta T + \ldots\,. \tag{8}$$

Damit wird

$$\dot{Q}_S = \varepsilon\,\sigma\,4\,T_0^3\,\Delta T\,\pi\,d\,l_K\,. \tag{9}$$

Die Energiebilanz liefert die Beziehung

$$P_V = \dot{Q}_K + \dot{Q}_S\,. \tag{10}$$

Einsetzen der Gleichungen (5), (6) und (9) gibt:

$$\varrho\,\frac{2\,l_K\,P^2}{q\,U^2} = \alpha\,\pi\,d\,l_K\,\Delta T + \varepsilon\,\sigma\,4\,T_0^3\,\Delta T\,\pi\,d\,l_K\,. \tag{11}$$

Auflösen nach ΔT ergibt schliesslich:

$$\Delta T = \frac{2\,\varrho\,P^2}{\pi\,d\,q\,U^2\,(\alpha + 4\,\varepsilon\,\sigma\,T_0^3)}\,. \tag{12}$$

Für $U = 240$ Volt und $T_0 = 293$ K wird

$$\Delta T = \frac{2 \cdot 0.0178 \cdot 1500^2}{\pi \cdot 6.5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.75 \cdot 240^2 \cdot (5 + 4 \cdot 1 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 293^3)} = 8.48 \tag{13}$$

Das Kabel hat also eine Temperatur von rund 28°C.

9. Januar 2018

A. Ruh

Korrektur: 30. Juni 2024