Erwärmung einer Kabelrolle

Problem

Ein Gerät, z.B. ein Ladegerät für ein Elektroauto, sei über eine Kabelrolle an einer Steckdose angeschlossen. Das Kabel sei nur zu einem kleinen Teil von der Kabelrolle abgewickelt. Wie stark erwärmt sich die Kabelrolle, wenn durch das Kabel ein Strom von 10 A fliesst?

Die Adern des Kabels haben einen Querschnitt q von 1.0 mm^2 und einen spezifischen Widerstand ϱ von $0.0178\,\Omega\mathrm{mm}^2\mathrm{m}^{-1}$. Der Aussendurchmesser d des Kabels ist 7 mm, und für die Wärmeübergangszahl α an der Kabeloberfläche werde 5 $\mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-1}$ eingesetzt. Für die Umgebungstemperatur T_0 wird 20 °C = 293 K angenommen.

Die Trommel der Kabelrolle hat einen Umfang U_T von 54 cm und eine Breite b von 12 cm.

Lösung

Die Verlustleistung im Kabel ist gegeben durch die Beziehung

$$P_V = R\,I^2\,, \tag{1}$$

wobei R den gesamten Widerstand des Kabels und I den Strom im Kabel bedeuten.

Der Widerstand eines Drahtes mit der Länge l_D und dem Querschnitt q ist

$$R_D = \varrho\,\frac{l_D}{q}\,. \tag{2}$$

Der totale Widerstand eines Kabels der Länge l_K ist somit

$$R = \varrho\,\frac{2\,l_K}{q}\,. \tag{3}$$

Die Verlustleistung im aufgerollten Teil l_R des Kabels ist

$$P_V = \varrho\,\frac{2\,l_R\,I^2}{q}\,. \tag{4}$$

Diese Leistung wird von der Kabelrolle durch Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung an die Umgebung abgegeben. Wenn die Wärmeabgabe durch Wärmeleitung entlang des Kabels zu den Kabelenden vernachlässigt wird, ist die Wärmeabgabe durch Leitung und Konvektion gegeben durch:

$$\dot{Q}_K = \alpha\,A\,\Delta T\,. \tag{5}$$

α ist die Wärmeübergangszahl, A ist die Oberfläche der Kabelschicht auf der Trommel und ΔT ist die gesuchte Temperaturdifferenz zwischen Kabeloberfläche und Umgebung.

Der Wärmetransport durch Strahlung ist

$$\dot{Q}_S = \varepsilon\,A\,\sigma(T^4 - T_0^4)\,. \tag{6}$$

T ist die Temperatur der Kabeloberfläche und T_0 ist die Temperatur der Umgebung.

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ $\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ ist die Stefan-Boltzmann-Konstante. Das Emissionsverhältnis ε der Kabeloberfläche im Infrarotbereich kann in guter Näherung gleich 1 gesetzt werden.

Mit $T = T_0 + \Delta T$ kann die Differenz $T^4 - T_0^4$ entwickelt werden:

$$T^4 - T_0^4 = (T_0 + \Delta T)^4 - T_0^4 = T_0^4 + 4\,T_0^3\,\Delta T + \ldots - T_0^4 = 4\,T_0^3\,\Delta T + \ldots\,. \tag{7}$$

Damit wird

$$\dot{Q}_S = \varepsilon\,A\,\sigma\,4\,T_0^3\,\Delta T\,. \tag{8}$$

Die Energiebilanz liefert die Beziehung

$$P_V = \dot{Q}_K + \dot{Q}_S\,. \tag{9}$$

Einsetzen der Gleichungen (4), (5) und (8) gibt:

$$\varrho\,\frac{2\,l_R\,I^2}{q} = A\,(\alpha + 4\,\varepsilon\,\sigma\,T_0^3)\,\Delta T\,. \tag{10}$$

Auflösen nach ΔT ergibt schliesslich:

$$\Delta T = \frac{2\,\varrho\,l_R\,I^2}{q\,A\,(\alpha + 4\,\varepsilon\,\sigma\,T_0^3)}\,. \tag{11}$$

Die Länge einer Windung in der ersten Lage ist

$$l_1 = \left(\frac{U_T}{2\,\pi} + \frac{d}{2}\right)\,2\,\pi = U_T + \pi\,d\,. \tag{12}$$

Wenn zur Vereinfachung angenommen wird, dass die Kabelwindungen genau aufeinander liegen, ist die Länge der Windungen der zweiten Lage gegeben durch

$$l_2 = \left(\frac{U_T + \pi\,d}{2\,\pi} + 2\,d\right)\,2\,\pi = U_T + \pi\,d + 2\,\pi\,d\,. \tag{13}$$

Analog ergibt sich die Länge der Windungen für die Lage n:

$$l_n = U_T + \pi\,d + (n-1)\,2\,\pi\,d\,. \tag{14}$$

Auf der Trommel haben $W = \lfloor b/d \rfloor$ Kabelwindungen nebeneinander Platz [1].

Somit ist die totale Länge des aufgerollten Kabelteils in n Lagen:

$$l_R = \left\lfloor \frac{b}{d} \right\rfloor\,\{n\,U_T + \pi\,d + (1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1)\,2\,\pi\,d\}\,. \tag{15}$$

Mit $b = 12$ cm, $d = 0.7$ cm, $U_T = 54$ cm und $n = 3$ ergibt sich $l_R = 3066$ cm.

Der innere Radius der Kabelschicht auf der Trommel ist

$$r_i = \frac{U_T}{2\,\pi}\,, \tag{16}$$

und für den äusseren Radius ergibt sich

$$r_a = \frac{U_T}{2\,\pi} + n\,d\,. \tag{17}$$

[1] Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist

Die totale Oberfläche der n Kabelschichten ist

$$A = 2\,\pi\,r_i\,d + 2\,\pi\,r_a\,d + 2\pi\,(r_a^2 - r_i^2)\,. \tag{18}$$

Mit den gegebenen Werten wird $A = 1708$ cm^2.

Wenn die gegebenen und die so berechneten Werte in die Beziehung (11) für die Temperaturdifferenz eingesetzt werden, ergibt sich

$$\Delta T = \frac{2 \cdot 0.0178 \cdot 30.66 \cdot 10^2}{1 \cdot 0.1708 \cdot (5 + 4 \cdot 1 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 293^3)} = 59.7\,. \tag{19}$$

Unter den gegebenen Voraussetzungen erwärmt sich die Kabelrolle auf 60 Grad über die Umgebungstemperatur.

17. Dezember 2021

A. Ruh

Korrektur: 30. Juni 2024